PREFAȚĂ

Cartea de față se adresează studenților din anul I al facultăților de inginerie. Ea este elaborată în conformitate cu programa analitică a cursului de *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferențială*, predat de autoare studenților Facultății de Inginerie a Universității "Constantin Brâncuşi" din Târgu - Jiu.

În cele 8 capitole ale lucrării de față sunt prezentate, într-o manieră riguroasă, noțiuni de bază privind spații vectoriale şi euclidiene, finit dimensionale, operatori liniari, forme biliniare şi pătratice, geometrie liniară în spațiu, conice, cuadrice, curbe în plan şi în spațiu. Majoritatea enuțurilor matematice sunt însoțite de demonstrații complete şi de exemple sugestive, ce asigură asimilarea corectă a noțiunilor teoretice introduse. De asemenea, prin exercițiile propuse la sfârşitul fiecărui capitol, cititorul este invitat să-şi verifice "abilitatea" de a lucra cu noțiunile şi metodele de demonstrație prezentate în carte.

Rezolvarea acestor exerciții nu va rămâne o enigmă pentru cititorul mai puțin "îndemânatic", deoarece cele mai multe dintre ele au rezolvări complete, iar altele, mai simple, prezintă indicații care conduc rapid la soluție.

În general, pentru parcurgerea acestei cărți, cititorul nu trebuie să consulte alte materiale, dar, fără îndoială, trebuie să stăpânească foarte bine noțiunile matematice predate în învățământul liceal.

Astfel, cartea poate fi utilă chiar şi elevilor de liceu cu aptitudini deosebite în studiul matematicii, precum şi tuturor celor interesați în studiul unor monografii de specialitate ce fac referire la noțiuni de bază de algebra liniară, geometrie analitică şi diferențială.

Autoarea

CAPITOLUL 1

SPAŢII VECTORIALE FINIT DIMENSIONALE

1.1 Definiţia spaţiilor vectoriale

Pentru a introduce noţiunea de spaţiu vectorial avem nevoie de noţiunea de *corp comutativ de caracteristică zero*. Aceasta este introdusă de definiţia de mai jos.

Definiţia 1.1.1 *Spunem că o mulţime K, dotată cu două operaţii, una notată aditiv (numită adunare) şi cealaltă notată multiplicativ (numită înmulţire), are o structură de corp comutativ dacă împreună cu adunarea este grup abelian, iar faţă de înmulţire, K - {0} (unde 0 este elementul neutru la adunare) este grup comutativ şi sunt verificate axiomele:*

1. *(distributivitate la dreapta)* $x(y+z) = xy + xz$*, oricare ar fi* $x, y, z \in K$
2. *(distributivitate la stânga)* $(x+y)z = xz + yz$*, oricare ar fi* $x, y, z \in K$.

Definiţia 1.1.2 *Caracteristica corpului K este cel mai mic număr* $n \in \mathbf{N}^*$ *pentru care* $na = 0$*, oricare ar fi* $a \in K$.

Dacă $na = 0$, oricare ar fi $a \in K$, are loc numai pentru $n = 0$ atunci corpul K are *caracteristica zero.*

Fie K un corp comutativ de caracteristică zero. Vom conveni ca de aici înainte să folosim denumirea mai simplă de corp pentru un corp comutativ de caracteristică zero, dacă nu sunt făcute alte precizări. Acum putem introduce definiția spațiului vectorial.

Definiția 1.1.3 *Un spațiu vectorial (liniar) V peste corpul K este o mulțime nevidă prevăzută cu două operații: o operație internă + : $V \times V \to V$, $(x, y) \to x + y$, numită adunarea vectorilor, împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică satisface axiomele:*

1. $(x + y)+ z = x + (y + z)$, oricare ar fi $x, y, z \in V$ (legea este asociativă);

2. $x + y = y + x$ oricare ar fi $x, y \in V$ (legea este comutativă);

3. există în V un element 0, vectorul zero, astfel încât $x + 0 = 0 + x$ oricare ar fi $x \in V$ (există element neutru);

4. oricare ar fi $x \in V$ există $- x \in V$ astfel încât $x + (- x) = (-x) + x = 0$ (orice element admite simetric)

şi o operație externă :$K \times V \to V$, $(\alpha, x) \to \alpha x$ (de înmulțire a vectorilor cu scalari) care satisface axiomele:

a. dacă $1 \in K$ este elementul neutru la înmulțire din K atunci $1x = x$, oricare ar fi $x \in K$.

b. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$ şi $x \in V$;

c. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$ şi $x \in V$;

d. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ oricare ar fi $\alpha \in K$ şi $x, y \in V$.

După cum se subînțelege din cele spuse mai sus, elementele corpului K se vor numi *scalari* şi vor fi notate cu litere ale alfabetului

grec, în timp ce elementele spaţiului vectorial V se vor numi *vectori* şi vor fi notate cu litere ale alfabetului latin. Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K se mai spune că *V este un K- spaţiu vectorial.*

În cazul în care K este corpul numerelor reale (respectiv complex), vom spune că V este spaţiu vectorial real (respectiv complex).

Observaţia 1.1.1 Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K atunci $\alpha x = 0$ ($\alpha \in K$, $x \in V$) dacă şi numai dacă $\alpha = 0$ sau $x = 0$. Într- adevăr, dacă $\alpha = 0$, atunci, deoarece $0 = 0 + 0$, aplicăm axioma c) din definiţia spaţiului vectorial şi avem $0x = 0x + 0x$. Adunând opusul lui $0x$ în ambii membrii ai egalităţii obţinem $0x = 0$. Raţionând asemănător putem arăta ca $\alpha 0 = 0$.

Reciproc, dacă $\alpha x = 0$, atunci presupunem prin absurd că $\alpha \neq 0$ şi $x \neq 0$. Înmulţim egalitatea precedentă, la stânga, cu α^{-1}, inversul lui α, şi obţinem $1x = \alpha^{-1}0$. Acum folosim rezultatul demonstrat mai sus şi axioma a) din Definiţia 1.1.3 şi obţinem $x = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$.

Observaţia 1.1.2 Conform celor stabilite în observaţia de mai sus avem $0 = 0x = ((-\alpha) + \alpha)x$. Deci $(-\alpha)x + \alpha x = 0$ sau $(-\alpha)x = -\alpha x$.

Observaţia 1.1.3 Spaţiul vectorial cu un singur element, care în mod evident este vectorul 0, se numeşte spaţiul nul şi se notează (0).

Exemplul 1.1.1 *Orice corp comutativ K are o structură de spaţiu vectorial peste el însuşi, dacă vom defini operaţia internă, de adunare a vectorilor, respectiv operaţia de înmulţire a vectorilor cu scalari, ca fiind operaţiile de adunare şi respectiv înmulţire ale corpului K.*

Exemplul 1.1.2 *Fie K un corp comutativ şi $V = K^n = K$ x K x …xK (produsul cartezian al lui K cu el însuşi de n ori). Avem $V = \{(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)/\ \alpha_i \in K$, oricare ar fi $i \in\{1, 2,\ldots n\}\}$. Dacă definim adunarea în V şi înmulțirea cu scalari din K după cum urmează*

$$(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n) = (\alpha_1+ \beta_1, \alpha_2 + \beta_2,\ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2,\ldots, \alpha\alpha_n),$$

atunci este uşor de văzut că sunt îndeplinite condițiile cerute de definiția spațiului vectorial şi V este un K spațiu vectorial.

Într-adevăr, V împreună cu operația de adunare are o structură de grup abelian în care elementul neutru este n-uplul (0, 0,…, 0) iar opusul unui vector oarecare $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) \in V$ este $(-\alpha_1, -\alpha_2,\ldots, -\alpha_n)$. Operația de înmulțire cu scalari satisface axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 şi rezultă concluzia.

În cazul particular în care K= ***R*** *(respectiv K =* ***C****), obținem spațiul vectorial real (respectiv complex) $\mathbf{R}^n$ (respectiv $\mathbf{C}^n$).*

Exemplul 1.1.3 *Fie V mulțimea $C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}$, f continuă$\}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Mulțimea V, împreună cu operațiile de adunare a funcțiilor şi de înmulțire a acestora cu numere reale, capătă o structură de spațiu vectorial real.*

Exemplul 1.1.4 *(* ***Complexificatul unui spațiu vectorial real****) Fie V un spațiu vectorial real. Fie mulțimea $V^C = V$ x V şi corpul numerelor complexe* ***C****. Pe această mulțime introducem două operații, adunarea şi înmulțirea cu scalari, astfel*

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),\ x, z, u, v \in V;$$

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x), \text{ oricare ar fi } x, y \in V \text{ şi } \alpha + i\beta \in \mathbf{C}.$$

Operaţia de înmulţire cu scalari de mai sus, arată că (0, y) = i(y, 0). Deoarece elementele $x \in V$ pot fi identificate cu perechile (x, 0), putem face convenţia că (0, y) = y şi (x, y) = x + iy. Acum este uşor de verificat faptul că cerinţele Definiţiei 1.1.3 sunt îndeplinite şi, în concluzie, V^C *este un spaţiu vectorial complex.*

Exemplul 1.1.5 *Mulţimea polinoamelor în nedeterminata t, de orice grad, cu coeficienţi reali, notată P(t) este spaţiu vectorial real împreună cu operaţia de adunare a polinoamelor şi de înmulţire a acestora cu scalari.(Exerciţiu)*

1.2 Combinaţii liniare. Sisteme liniar dependente şi liniar independente

În cele ce urmează vom conveni să numim familie de vectori o mulţime oarecare de vectori, iar prin sistem de vectori vom înţelege o mulţime cel mult numărabilă de vectori. Fie I o familie oarecare de indici.

Definiţia 1.2.1 *Vectorul $x \in V$ este combinaţie liniară a familiei de vectori $(x_i)_{i \in I}$, dacă x se poate scrie sub forma $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$, unde numai un număr finit dintre coeficienţii α_i sunt nenuli.*

Observaţia 1.2.1 Vectorul 0 este combinaţie liniară de orice familie de vectori, deoarece putem lua în relaţia din definiţie $\alpha_i = 0$, $i \in I$.

Definiţia 1.2.2 *Familia G = $(x_i)_{i \in I}$ de vectori din V este sistem de generatori pentru V dacă pentru orice vector $x \in V$ există*

familia finită $I_0 \subset I$ astfel încât $x = \sum_{i \in I_0} \alpha_i x_i$.

Exercițiul 1.2.1 Dacă $G \subset V$ este sistem de generatori pentru V şi $G_1 \subset G$ este "sistem de generatori pentru G", adică orice vector din G_1 se poate scrie ca o combinație liniară de vectori din G, atunci G_1 este sistem de generatori pentru V.

Definiția 1.2.3 *Familia* $(x_i)_{i \in I}$ *de vectori din V este liniar independentă dacă vectorul nul se poate scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei numai cu scalari nuli, adică pentru orice familie $I_0 \subset I$, finită avem*

$$"\sum_{i \in I_0} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0,\ i \in I_0\ ".$$

Observația 1.2.2 Orice submulțime a unei familii liniar independente este la rândul ei o familie liniar independentă.

Observația 1.2.3 O familie de vectori formată dintr-un singur vector x este liniar independentă dacă şi numai dacă $x \neq 0$. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$ atunci din $\alpha x = 0$ rezultă, conform Observației 1.1.1, $\alpha = 0$ şi deducem că familia este liniar independentă.

Reciproc, dacă $\{x\}$ este familie liniar independentă atunci este necesar ca $x \neq 0$ căci altfel, pentru $x = 0$, avem $\alpha 0 = 0$ pentru orice $\alpha \neq 0 \in K$, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiția 1.2.4 *Familia* $(x_i)_{i \in I}$ *de vectori din V este liniar dependentă dacă vectorul nul se poate scrie ca o combinație liniară*

de vectori ai familiei, cu scalari nu toţi nuli, adică există $\alpha_i \in K$, $i \in I$ nu toţi nuli astfel încât $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$.

Observaţii. 1. Orice familie de vectori din V care conţine vectorul nul este liniar dependentă. Într-adevăr dacă x_i, $i \in I$ sunt ceilalţi vectori ai familiei atunci avem combinaţia nulă $1 \cdot 0 + \sum_{i \in I} 0x_i = 0$.

2. Mai general, orice familie de vectori din V care conţine o familie liniar dependentă este liniar dependentă.

I. Caracterizări ale familiilor liniar dependente

Teorema 1.2.1 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a)familia de vectori $\{x_1, x_2,, \ldots, x_n\}$, nenuli este liniar dependentă ;

b) există un indice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât x_j se scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori din familie.

c) există un indice $2 \leq j \leq m$ astfel încât x_j se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii precedenţi lui.

Demonstraţie. "a) $\Rightarrow$ b)" Dacă familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar dependentă, atunci există scalarii $\alpha_i \in K$, nu toţi nuli, astfel încât

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + \alpha_j x_j + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Fără a restrânge generalitatea presupunem că $\alpha_j \neq 0$. Înmulţim relaţia de mai sus cu inversul lui α_j şi obţinem succesiv

$$0 = (\alpha_j)^{-1}\alpha_1 x_1 + (\alpha_j)^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j-1} x_{j-1} + (\alpha_j)^{-1}\alpha_j x_j +$$
$$(\alpha_j)^{-1}\alpha_{j+1} x_{j+1} + \ldots + (\alpha_j)^{-1}\alpha_n x_n \text{ şi}$$

$$x_j = - (\alpha_j)^{-1}\alpha_1 x_1 - (\alpha_j)^{-1}\alpha_2 x_2 - \ldots - (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j-1} x_{j-1} -$$

$$(\alpha_j)^{-1}\alpha_{j+1}x_{j+1} - \ldots - (\alpha_j)^{-1}\alpha_n x_n.$$

Astfel, prima implicație a echivalenței "a) $\Leftrightarrow$ b)", a fost demonstrată. În continuare vom demonstra implicația "b) $\Rightarrow$ a)".

Dacă există $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi scalarii $\alpha_i \in K$ astfel încât

$$x_j = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n,$$

atunci avem combinația nulă cu scalari nu toți nuli $0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + (-1)x_j + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n$ şi, conform Definiției 1.2.4, deducem că familia este liniar dependentă. Implicația "c) $\Rightarrow$ b)" este evidentă.

Pentru a termina demonstrația este suficient să arătăm că "a) $\Rightarrow$ c)". Fie $1 \leq p \leq m$ cel mai mare indice cu proprietatea că familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar independentă. Existența indicelui p este asigurată de faptul că dacă $x_1 \neq 0$, atunci este clar că $\{x_1\}$ este familie liniar independentă. În cazul în care $\{x_1, x_2\}$ este familie liniar independentă, se continuă procedeul de determinare a lui p (procedeu care se termină într-un număr finit de paşi, căci numărul de vectori din sistem este finit), altfel se alege p = 1.

Dacă sistemul $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar independent şi p este maxim cu această proprietate atunci familia $\{x_1, x_2,, \ldots, x_p, x_{p+1}\}$ este liniar dependentă. Conform definiției, există scalarii $\alpha_i \in K$, $i = 1, p+1$, nu toți nuli astfel încât

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1}.$$

Este uşor de văzut că dacă $\alpha_{p+1} = 0$ atunci familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar dependentă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha_{p+1} \neq 0$ şi înmulțind egalitatea de mai sus cu inversul lui α_{p+1} obținem:

$$0 = (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_1 x_1 + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_p x_p + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_{p+1}x_{p+1}$$

sau $x_{p+1} = -(\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_1 x_1 - (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_2 x_2 - \ldots -(\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_p x_p$. Demonstraţia a fost încheiată.

Exemplul 1.2.1 *Dacă vom considera spaţiul vectorial real* $\boldsymbol{R}^3$ *atunci este uşor de văzut că familia de vectori* $\{x_1 = (-1, 2, -3), x_2 = (0, 3, 4), x_3 = (-1, 5, 1), x_4 = (-2, 3, 4)\}$ *este liniar dependentă, deoarece* $x_3 = x_2 + x_1$ *şi se aplică teorema de mai sus.*

II. Caracterizări ale familiilor liniar independente

Teorema 1.2.2 *O familie de vectori* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *a K- spaţiului vectorial V este liniar independentă dacă şi numai dacă orice scriere a unui vector x din spaţiu ca o combinaţie liniară cu vectori ai familiei se realizează în mod unic. Altfel spus, dacă avem scrierea* $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in K$, $i = 1,\ldots,n$ *atunci coeficienţii* α_i, $i = 1,\ldots,n$ *sunt unic determinaţi de vectorul x.*

Demonstraţie. Presupunem că familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă şi mai presupunem că există $x \in V$ astfel încât x se scrie ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei. Deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Presupunem prin absurd că mai există o altă scriere a lui x ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei date. Fie scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ astfel încât $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ şi cel puţin pentru un indice $i \in \{1,2,\ldots n\}$ $\alpha_i \neq \beta_i$. Scăzând cele două relaţii de mai sus, membru cu

membru, şi aplicând axiomele spaţiului vectorial obţinem

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_i - \beta_i)x_i + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)x_n,\ \alpha_i - \beta_i \neq 0.$$

Relaţia de mai sus contrazice Definiţia 1.2.3, deci faptul că familia dată este liniar independentă. În concluzie, presupunerea că x nu se scrie în mod unic ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei este falsă. Reciproc, presupunem că orice scriere a unui vector $x \in V$ ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei considerate se realizează în mod unic. Observăm că $0 \in V$ şi $0 = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n$. Orice altă scriere $0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ conduce la şirul de relaţii $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Aplicăm Definiţia 1.2.3. şi obţinem concluzia.

În cazul familiilor finite de vectori din spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^n$ avem următoare teoremă de caracterizare a familiilor liniar independente.

Teorema 1.2.3 *O familie de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a spaţiului vectorial real $\boldsymbol{R}^n$ este liniar independentă dacă şi numai dacă matricea care are pe coloane componentele vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are rangul n.*

Demonstraţie. Familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă dacă şi numai dacă "$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$". Dacă $x_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ atunci afirmaţia de mai sus este echivalentă cu faptul că sistemul liniar şi omogen $X\alpha^T = 0$ admite numai soluţia nulă, unde α^T este transpusa[*)] matricei linie $\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ iar $X \in M_n(\mathbf{R})$[**)], $X = (x_{ij})_{i=1,n,j=1,n}$. Acest

[*] Dacă $A = (a_{ij})_{i=1,n,j=1,m}$ este o matrice cu elemente din corpul K atunci vom nota cu $A^T = (a_{ji})_{j=1,m\ i=1,n}$, transpusa matricei A.

[**] $M_n(\mathbf{R})$ (respectiv $M_{n,m}(\mathbf{R})$) este mulţimea matricelor pătrate de ordinul n (respectiv cu n linii şi m coloane) cu elemente reale.

lucru este posibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului, adică rangul matricei X este egal cu numărul de necunoscute.
Sistemul având *n* necunoscute, rezultă concluzia.

Propoziţia următoare este o consecinţă directă a acestei teoreme, motiv pentru care lăsăm demonstraţia ca exerciţiu pentru cititor:

Propoziţia 1.2.1 *Familia de vectori* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbf{R}^n$ *este liniar dependentă dacă şi numai dacă rangul matricei care are pe coloane (sau linii) componentele vectorilor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *are rangul k mai mic decât n. Mai mult, orice subfamilie a acesteia care conţine vectori ce au componente într-un minor de ordinul k nenul este liniar independentă. Numărul maxim de elemente al unei subfamilii liniar independente este egal cu rangul k al matricei despre care am vorbit mai sus.*

Observaţia 1.2.4 Afirmaţiile Teoremei 1.2.3 rămân valabile dacă vom considera în loc de $\mathbf{R}^n$ spaţiul K^n , unde K este un corp.

Exemplul 1.2.2 *Familia de vectori S={(-1, 3, 4, 0, 5), (2, 4, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0)} din* $\mathbf{R}^5$ *este liniar independentă deoarece rangul matricei asociate conform Teoremei 1.2.3 este egal cu numărul de vectori, adică cu 4.*

În schimb, familia de vectori F = {(-1, 3, 4, 0, 5), (2, 4, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 2), (3, 2, 4, 5, 6)} din acelaşi spaţiu este liniar dependentă, conform aceleiaşi teoreme, deoarece rangul matricei asociate nu poate depăşi cea mai mică dimensiune a acesteia 5, iar numărul de vectori este 6.

1.3 Baza a unui spațiu vectorial. Dimensiune

Definiția 1.3.1 *Se numeşte bază a spațiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplineşte condițiile de mai jos:*

a) B este liniar independentă;

b) B este sistem de generatori pentru spațiul V.

Din definiția de mai sus şi din Teorema 1.2.2 putem deduce că orice vector $x\in V$ se poate scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei B şi că această scriere este unică.

Într-adevăr, dacă $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V, atunci orice vector $x\in V$ se scrie în mod unic

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n .$$

Definiția 1.3.2 *Scalarii $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ din relația de mai sus se vor numi coordonatele vectorului x în baza B. Vom folosi notația $x_B = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ pentru coordonatele lui x în baza B.*

Definiția de mai sus se extinde în mod natural şi la baze indexate după familii oarecare de indici. Astfel, scalarii ξ_i, coeficienții vectorilor u_i, $i\in I$ (I familie oarecare de indici) din scrierea unică a lui x ca o combinație liniară de vectori ai bazei B se vor numi coordonatele vectorului x în baza B.

Exemplul 1.3.1 *Considerăm spațiul vectorial de la Exemplul 1.1.5. Mulțimea infinită a monoamelor de orice grad, $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ este familie liniar independentă şi sistem de generatori pentru spațiul vectorial real P(t), deci bază.*

Într-adevăr, fie $0 = \sum_{i \in N} \alpha_i t^i$ *o combinaţie liniară nulă formată cu vectorii familiei B, în care numai un număr finit de coeficienţi sunt nenuli. Vom arăta că toţi coeficienţii sunt nuli. Fie r cel mai mare indice pentru care* $\alpha_r \neq 0$. *Din relaţia* $0 = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_r t^r$, *adevărată pentru orice* $t \in \boldsymbol{R}$ *deducem că* $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$, *(deoarece avem de a face cu un polinom de gradul r care este identic nul. Deci B este o familie liniar independentă. Faptul că B este sistem de generatori pentru P(t) rezultă observând că orice polinom* $f \in P(t)$ *de grad k este o combinaţie liniară a primilor k vectori ai familiei B. De exemplu, coordonatele vectorului* $f = t^7 + 5t^3 - 4t^2 + 1$ *în baza B sunt (1, 0, -4, 5, 0, 0, 0, 1, 0, …, 0,…).*

Exemplul 1.3.2 *Familia* $B = \{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 0, 0), u_4 = (1, 0, 0, 0)\}$ *a spaţiului vectorial real* $\boldsymbol{R}^4$ *este o bază pentru acesta. Într-adevăr, este uşor de constatat că rangul matricei A*
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *este 4 şi, conform Teoremei 1.2.3, familia B este liniar independentă. Mai rămâne de arătat faptul că B este sistem de generatori pentru* $\boldsymbol{R}^4$. *În baza Definiţiei 1.2.2, vom demonstra că pentru orice* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4$, *există scalarii reali* α_i, $i = 1, \ldots, 4$ *astfel încât* $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$ *sau, echivalent,*

(1.3.1) $$A^T \alpha^T = x^T, \qquad \text{unde } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

Acum este clar că existenţa scalarilor α_i, $i = 1, \ldots, 4$ *este echivalentă cu faptul că sistemul (1.3.1) este compatibil. Deoarece rang* A^T = *rang* $(A^{T,} x^T) = 4$, *rezultă că sistemul (1.3.1) este compatibil (vezi paragraful*

din secţiunea 1.5 dedicat rezolvării sistemelor liniare) şi în consecinţă B este sistem de generatori pentru $\boldsymbol{R}^4$*. Deci B este o bază pentru* $\boldsymbol{R}^4$*. Coordonatele vectorului x în baza B sunt date de soluţia sistemului (1.3.1). De exemplu, dacă x = (4, 3, 2, 1), atunci* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Un spaţiu vectorial poate avea mai multe baze, aşa cum rezultă din exemplul următor:

Exemplul 1.3.3 *Considerăm în spaţiul* $\boldsymbol{R}^3$ *următoarele familii de vectori* $B = \{E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$ *şi* $B_1 = \{ u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$*. Se observă că orice vector* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$ *se poate scrie* $x = x_1 E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$*, deci B este sistem de generatori pentru* $\boldsymbol{R}^3$*. B este şi sistem liniar independent deoarece matricea A =* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, care are pe coloane componentele vectorilor familiei B, are rangul egal cu trei, adică cu numărul vectorilor din B. În concluzie B este bază pentru* $\boldsymbol{R}^3$*. Analog se arată că şi* B_1 *este o bază a lui* $\boldsymbol{R}^3$*.*

Observaţia 1.3.1 Baza B din exemplul de mai sus se numeşte bază canonică a lui $\mathbf{R}^3$. După cum am văzut, coordonatele unui vector $x\in\mathbf{R}^3$, în baza canonică, coincid cu componentele sale. Acest rezultat rămâne valabil dacă considerăm în locul spaţiului $\boldsymbol{R}^3$, spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^n$, $n\in\mathbf{N}$, $n>3$, cu precizarea că baza canonică în $\mathbf{R}^n$ este $\{E_1 = (1, 0,\ldots,0), E_2 = (0, 1,\ldots, 0), \ldots, E_i = (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots0), \ldots, E_n = (0, 0,\ldots,1)\}$.

Teorema 1.3.1 *Fie* $G= (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *un sistem de generatori din spaţiul vectorial* $V \neq (0)$*. Atunci există o bază B a lui V conţinută în G.*

Demonstraţie. Deoarece $V \neq (0)$, putem deduce că există $x_i \in G$, $i = 1,\ldots,m$ astfel încât $x_i \neq 0$. Într-adevăr, dacă presupunem prin absurd că toţi $x_i = 0$, atunci nici un vector $x \neq 0$ din V nu poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei G (vezi Observaţia 1.1.1). Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $x_1 \neq 0$. Atunci familia $\{x_1\}$ este liniar independentă. Deci există sisteme liniar independente incluse în G. Fie $\Im(G)$ familia tuturor sistemelor de vectori liniar independente din G şi fie $F \in \Im(G)$ astfel încât numărul de elemente din F să fie maxim. Vom arăta că F este o bază a lui V. Din construcţie, F este sistem de vectori liniar independent, deci este suficient să arătăm că F este sistem de generatori pentru V. Fie $x \in G$, $x \notin F$. Familia $F \cup \{x\}$ este liniar dependentă, căci altfel este contrazisă maximalitatea lui F (dacă familia $F \cup \{x\}$ ar fi liniar independentă ea ar avea un element în plus faţă de F şi am obţine o contradicţie). Aplicăm Teorema 1.2.1 şi deducem că x este o combinaţie liniară a vectorilor din F. Deci orice vector din G este o combinaţie liniară de vectori ai familiei F. Deoarece G este sistem de generatori pentru V, putem deduce, conform Exerciţiului 1.2.1, că F este sistem de generatori pentru V, şi demonstraţia este încheiată.

Teorema 1.3.2 *Dacă $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ este un sistem de generatori în V, iar $F = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un sistem liniar independent atunci $n \leq m$.*

Demonstraţie. Deoarece G este sistem de generatori pentru V, atunci orice vector din V se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din G, în particular şi vectorii din F. Deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ astfel încât

$$v_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m. \qquad (1.3.1)$$

Deoarece $v_1 \neq 0$ (altfel F nu ar mai fi familie liniar independentă), deducem că există $i \in \{1,\ldots,n\}$ astfel încât $\alpha_i \neq 0$ şi putem presupune că $\alpha_1 \neq 0$, eventual în urma unei renumerotări. Prin adunarea în ambii membrii ai relației (1.3.1) a vectorului $- \alpha_1 x_1 - v_1$ şi prin înmulțirea relației rezultate cu $(- \alpha_1)^{-1}$, obținem

$$x_1 =(- \alpha_1)^{-1}(-v_1) + (- \alpha_1)^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots +(- \alpha_1)^{-1}\alpha_m x_m.$$

Deci x_1 este o combinație liniară de vectori ai familiei $G_1 = \{v_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Folosind Exercițiul 1.2.1 deducem că G_1 este un sistem de generatori pentru V. Continuăm procedeul de mai sus considerând în locul lui G sistemul G_1 şi următorul vector din familia F, dacă acesta există. La acest pas avem

$$v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m. \tag{1.3.2}$$

şi este clar că cel puțin unul din coeficienții vectorilor $x_2,\ldots, x_m$ este nenul. În caz contrar, aplicăm Teorema 1.2.1 şi deducem că F nu este liniar independentă, ceea ce contrazice ipoteza. Raționând ca mai sus vom înlocui în G_1 pe x_2 cu v_2 şi vom obține familia G_2 care va fi de asemenea sistem de generatori pentru V. Aplicăm procedeul descris mai sus în continuare şi, după un număr finit de paşi, putem întâlni următoarele situații: fie am folosit toți vectorii din F pentru a înlocui vectori din G, caz în care demonstrația este încheiată, căci rezultă că $n \leq m$, fie am înlocuit toți vectorii din G cu vectori din F şi mai avem încă vectori în F.

În acest caz, fie $x \in F$ care nu a fost încă înlocuit. Conform procedeului, în locul lui G avem acum o familie de vectori din F care este sistem de generatori pentru V. Deci acest x se va scrie ca o combinație liniară de vectori din F, ceea ce contrazice faptul că F este familie liniar

independentă (a se vedea Teorema 1.2.1). În concluzie, acest ultim caz nu este posibil şi demonstraţia a fost încheiată.

Corolarul 1.3.1 *Dacă o bază dintr-un spaţiu vectorial are un număr finit de vectori atunci orice altă bază din acel spaţiu va avea acelaşi număr de vectori.*

Demonstraţie. Fie B şi B_1 baze în spaţiul vectorial V. Presupunem că B este formată dintr-un număr (finit) de *m* vectori. Vom demonstra că şi B_1 are tot *m* vectori. Dacă ţinem cont de faptul că B este în particular sistem de generatori şi B_1 este sistem liniar independent, aplicăm Teorema 1.3.2 şi deducem că numărul de vectori ai lui B_1 pe care îl vom nota *k* satisface inegalitatea $k \leq m$. Acum schimbăm rolul lui B cu cel al lui B_1 şi aplicând aceeaşi teoremă deducem că avem şi inegalitatea $m \leq k$. Din cele două inegalităţi obţinem $m = k$ şi rezultă concluzia.

Deci numărul de vectori dintr-o bază a unui spaţiu vectorial este un element caracteristic al spaţiului vectorial şi nu depinde de baza aleasă. Din corolarul de mai sus arată rezultă că, dacă spaţiul vectorial V admite o bază formată dintr-un număr infinit de vectori, atunci orice altă bază a acestuia va conţine tot un număr infinit de vectori.

Astfel putem introduce definiţia următoare:

Definiţia 1.3.3 *Prin dimensiune a unui K - spaţiu vectorial V, notată $\dim_K(V)$, înţelegem numărul de vectori dintr-o bază a acestuia. Dacă spaţiul vectorial V admite o bază cu un număr infinit de vectori, vom spune că acesta are dimensiunea infinită şi vom scrie $\dim_K(V) = \infty$. Altfel, V este un spaţiu vectorial de dimensiune finită.*

În cele ce urmează ne vom referi la spaţii vectoriale de dimensiune finită, dacă nu vom face alte precizări.

Observaţia 1.3.2. O consecinţă directă a Corolarului 1.3.1 este următoarea: o familie de vectori dintr-un spaţiu vectorial de dimensiune n, formată din m vectori, $m \geq n+1$ este liniar dependentă.

Exemplul 1.3.4 *Spaţiul vectorial de la Exemplul 1.1.5, pentru care a fost găsită o bază cu un număr infinit de vectori (vezi Exemplul 1.3.1) are dimensiune infinită, în timp ce spaţiul* $\boldsymbol{R}^4$ *va avea dimensiunea 4 (vezi Exemplul 1.3.2).*

Teorema 1.3.3 *Într-un spaţiu vectorial de dimensiune finită, orice familie de vectori liniar independentă poate fi extinsă la o bază.*

Demonstraţie. Fie B $= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în spaţiul vectorial V şi fie F $= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ o familie liniar independentă. Familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este un sistem de generatori pentru V şi este liniar dependentă, deoarece orice vector x_i se scrie ca o combinaţie liniară de vectori ai bazei B. Atunci, conform Teoremei 1.2.1 există un prim vector care este combinaţie liniară de precedenţii. Evident, acesta va fi unul din vectorii bazei B. Fie u_i acest prim vector. Familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ este tot un sistem de generatori pentru V. Procedeul continuă (dacă este posibil) cu eliminarea următorului vector u_k, care este combinaţie liniară de vectorii precedenţi lui. La fiecare pas familia nou obţinută este fie liniar independentă, caz în care am obţinut baza care va conţine familia F, fie este liniar dependentă şi în această situaţie se continuă eliminarea. Într-un număr finit de paşi se obţine concluzia.

1.4 Schimbarea bazei unui spaţiu vectorial

După cum s-a văzut deja, într-un spaţiu vectorial V avem mai multe baze, iar un vector $x\in V$ va avea câte un sistem de coordonate pentru fiecare astfel de bază. Se pune în mod firesc problema stabilirii unei legături între coordonatele aceluiaşi vector atunci când se schimbă bazele. Înainte de a formula, Teorema 1.4.1 care rezolvă deplin această problemă, trebuie să introducem noţiunea de matrice de *trecere* (de la o bază B la o altă bază B' a spaţiului V).

Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune finită, *n* şi fie $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ două baze în acest spaţiu.

Fie a_{ij}, $j = 1,\dots,n$ coordonatele vectorului v_i în baza B, adică

$$v_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n,\ i = 1,\dots,n.$$

Matricea $A = (a_{ij})$, $i, j = 1,\dots,n$ este o matrice nesingulară*). Într-adevăr, presupunem prin absurd că A este singulară*). Considerăm ecuaţia vectorială

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0. \tag{1.4.1}$$

Avem $\alpha_1[a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n] + \alpha_2[a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n] + \dots + \alpha_n[a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n] = 0$. Rearanjând termenii, conform axiomelor spaţiului vectorial, obţinem

$$[\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_n a_{n1}]u_1 + [\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{n2}]u_2 + \dots +$$
$$[\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_n a_{nn}]u_n = 0.$$

De aici se obţine sistemul algebric liniar şi omogen

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_n a_{n1} = 0$$

*) Prin matrice nesingulară înţelegem o matrice inversabilă. Analog , o matrice singulară este o matrice care nu este inversabilă.

$$\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{n2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = 0.$$

Matricea asociată acestui sistem este în mod evident A^T. Aceasta fiind singulară, conform presupunerii făcute, deducem că sistemul admite şi soluții nebanale, adică există α_1, α_2, …,α_n, nu toți nuli, astfel încât să aibă loc (1.4.1). Astfel, rezultă că familia B' nu este liniar independentă, şi am obținut o contradicție. Deci matricea A este nesingulară.

Definiția 1.4.1 *Matricea A introdusă mai sus se numeşte matricea de trecere de la baza B la baza B' sau matricea schimbării de baze.*

Teorema 1.4.1 *Dacă un vector $x \in V$ are coordonatele $x = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ în baza $B = \{u_1, u_2,\ldots, u_n\}$ şi coordonatele $\xi = (\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n)$ în baza $B' = \{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$ iar $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$ este matricea de trecere de la baza B la B' atunci legătura între cele două sisteme de coordonate este dată de formula:*

$$\xi^T = (A^T)^{-1}x^T. \tag{1.4.2}$$

Demonstrație. Folosind definiția matricei de trecere, avem succesiv $x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \ldots + \xi_n v_n = \xi_1[a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n] + \xi_2[a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n] + \ldots + \xi_n[a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n] = [\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{21} + \ldots + \xi_n a_{n1}]u_1 + [\xi_1 a_{12} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_n a_{n2}]u_2 + \ldots + [\xi_1 a_{1n} + \xi_2 a_{2n} + \ldots + \xi_n a_{nn}]u_n$. Pe de altă parte are loc şi egalitatea $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$. Folosind Teorema 1.2.2, care asigură unicitatea coordonatelor într-o bază, obținem:

$$x_1 = \xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{21} + \ldots + \xi_n a_{n1}$$

$$x_2 = \xi_1 a_{12} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_n a_{n2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \xi_1 a_{1n} + \xi_2 a_{2n} + \ldots + \xi_n a_{nn}.$$

Relațiile de mai sus vor fi scrise sub formă matricială astfel

$$x^T = A^T \xi^T.$$

Deoarece matricea de trecere A este inversabilă (şi la fel transpusa sa) înmulțim relația precedentă cu $(A^T)^{-1}$ şi obținem concluzia.

Exemplul 1.4.1 *Fie spațiul vectorial real* $\boldsymbol{R}^3$ *în care vom considera bazele introduse în Exemplul 1.3.3. Conform Observației 1.3.1, se deduce că matricea de trecere de la baza canonică B la baza B' este chiar matricea care are pe linii componentele vectorilor din baza B', adică A =* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Atunci coordonatele unui vector x =* $(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$ *în baza B' vor fi date de formula de mai jos (conform teoremei de mai sus):*

$$\xi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x^T.$$

1.5 Lema substituției

În această secțiune vom prezenta Lema substituției, un rezultat clasic de algebră liniară, precum şi aplicațiile acesteia. După cum se va vedea, asocierea unui algoritm la acest rezultat face din el un instrument de lucru deosebit de util atât în programarea calculatoarelor, cât şi în

efectuarea "de mână" a unor calcule ce comportă lucrul cu spații vectoriale de dimensiuni mari.

Lema 1.5.1 *(Lema Substituției) Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în spațiul vectorial V şi $y \in V$, $y \neq 0$ cu coordonatele $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în baza B. Dacă coordonata y_i corespunzătoare indicelui i este nenulă, atunci familia $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ este bază pentru spațiul V. Mai mult, dacă $(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ sunt coordonatele unui vector $v \in V$ în baza B, atunci coordonatele lui v în baza B_1 vor fi $v'_p = v_p - v_i(y_i)^{-1} y_p$, $p \in \mathbf{N}^*$, $p \leq n$, $p \neq i$, $v'_i = (y_i)^{-1} v$.*

Demonstrație. Înainte de a începe demonstrația, facem observația că dacă $y \neq 0$ atunci cel puțin una din coordonatele sale în baza B este nenulă, în caz contrar am obține $y = 0$. Avem

$$y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_{i-1} u_{i-1} + y_i u_i + y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + y_n u_n.$$

Prin adunarea vectorului $- y - y_i u_i$ în ambii membrii ai relației de mai sus se obține

$$- y_i u_i = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_{i-1} u_{i-1} - y + y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + y_n u_n .$$

Înmulțind noua relație cu $(- y_i)^{-1}$ avem

$$u_i = (- y_i)^{-1} y_1 u_1 + (- y_i)^{-1} y_2 u_2 + \ldots + (- y_i)^{-1} y_{i-1} u_{i-1} - (- y_i)^{-1} y + (- y_i)^{-1} y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + (- y_i)^{-1} y_n u_n. \tag{1.5.1}$$

De aici se deduce, conform Exercițiului 1.2.1, că familia $B_1 = \{ u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, y_i, u_i, \ldots, u_n \}$ este un sistem de generatori pentru V. Deoarece Teorema 1.3.1 ne asigură că din orice sistem de generatori putem extrage o bază a spațiului, deducem că B_1 este chiar o bază.

Într-adevăr, dacă am găsi o submulțime strictă a lui B_1 care să fie bază atunci aceasta ar avea un număr de elemente mai mic strict decât n ceea ce ar contrazice Corolarul 1.3.1.

Dacă $(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ sunt coordonatele unui vector v în baza B atunci $v = v_1u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_{i-1} u_{i-1} + v_i [(- y_i)^{-1}y_1u_1 + (- y_i)^{-1}y_2 u_2 + \ldots + (- y_i)^{-1}y_{i-1} u_{i-1} - (- y_i)^{-1}y + (- y_i)^{-1}y_{i+1} u_{i+1} +\ldots +(- y_i)^{-1}y_n u_n] + v_{i+1} u_{i+1} + \ldots + v_n u_n$. Regrupând termenii conform axiomelor spațiului vectorial, avem

$$v = [v_1 - v_i(y_i)^{-1}y_1]u_1 + [v_2 - v_i(y_i)^{-1}y_2]u_2 + \ldots + [v_{i-1} - v_i(y_i)^{-1}y_{i-1}]u_{i-1} + [v_i\ y_i^{-1}]u_i + [v_{i+1} - v_i(y_i)^{-1}y_{i+1}]u_{i+1} + \ldots + [v_n - v_i(y_i)^{-1}y_n]u_n.$$

În cazul spațiilor $\mathbf{R}^n$ rezultatul din lemă este sintetizat de tabelele de mai jos.

Tabelul 1.5.1

baza spațiu lui R^n	coord. vect. y	coord. vect. v
	y	v
u_1	y_1	v_1
u_2	y_2	v_2
....	....	....
u_i	$\boxed{y_i}$	v_i
....	....	....
u_n	y_n	v_n

pivot

Tabelul 1.5.2

baza spațiu lui R^n	coord. vect. y	coord. vect. v
	y	v
u_1	0	$v_1 - \dfrac{v_i y_1}{y_i}$
u_2	0	$v_2 - \dfrac{v_i y_2}{y_i}$
....	....	....
y	1	$\dfrac{v_i}{y_i}$
....	....	....
u_n	0	$v_n - \dfrac{v_i y_n}{y_i}$

Tabelul 1.5.1 conține coordonatele vectorilor y şi v în baza B iar Tabelul 1.5.2 conține coordonatele aceloraşi vectori în baza obținută prin înlocuirea vectorului u_i din baza B cu vectorul y. Vom indica o celulă oarecare din cele două tabele precizând numele liniei şi coloanei din care face parte, de exemplu vom vorbi despre celula (u_i, v).

Elementul $y_i \neq 0$ din Tabelul 1.5.1(adică coordonata nenulă a vectorului y care face posibilă aplicarea Lemei 1.5.1) se numeşte *pivot*, iar coloana (respectiv linia) din Tabelul 1.5.1 ce conține pivotul se numeşte *coloana pivotului* (respectiv *linia pivotului*).

Astfel, se poate enunța următorul algoritm de obținere a coordonatele vectorilor y şi v în noua bază, B', adică de obținere a elementelor Tabelului 1.5.2 din elementele Tabelului 1.5.1.

a) Prima coloană a Tabelului 1.5.2 va conține lista vectorilor din noua bază.

b) Coloana pivotului din Tabelul 1.5.1 se transformă astfel: pivotul se înlocuieşte cu 1 iar celelalte elemente (din coloană) cu 0 şi se obține coloana coordonatelor vectorului y din Tabelul 1.5.2.

c) Elementele de pe linia pivotului din Tabelul 1.5.1 se împart la pivot şi obținem linia corespunzătoare vectorului y în Tabelul 1.5.2.

d) Restul elementelor din Tabelul 1.5.2 se obțin cu "regula dreptunghiului": Valoarea care va fi introdusă în celula (u_i, v) din Tabelul 1.5.2 se determină astfel:

Se formează dreptunghiul care are pe diagonală pivotul şi elementul aflat în celula (u_i, v) din Tabelul 1.5.1 (element notat E.T). Se calculează diferența dintre E.T şi raportul dintre produsul elementelor de pe diagonala dreptunghiului care nu conține pivotul şi pivot, adică cu valoarea

$$\text{E.T-}\ \frac{\text{prod.elem.de pe diag.ce nu contine pivot}}{\text{pivot}}.$$

Valoarea obţinută se transcrie în Tabelul 1.5.2 în celula (u_i, v). De exemplu, pentru obţinerea coordonatei v'_1 se formează dreptunghiul y_1, v_1, v_i, y_i (vezi Tabelul 1.5.1) şi aplicând regula dreptunghiului avem

$$v'_1 = v_n - \frac{v_i y_1}{y_i}.$$

Aplicaţii ale Lemei substituţiei

1. Determinarea matricei de trecere de la o bază la alta.

O primă aplicaţie a Lemei substituţiei o constituie determinarea matricei de trecere de la o bază la alta.

Exemplul 1.5.1 *Fie B = {e_1 = (1, 2, 4), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (1, 0, 1)} şi B_1 = { u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)} două baze în $\mathbf{R}^3$ iar $x \in \mathbf{R}^3$ un vector ale cărui coordonate în baza B sunt (-1, 2, 3).*

Să se determine matricea de trecere de la baza B la B' şi respectiv coordonatele vectorului x în baza B'.

Rezolvare: Deoarece cunoaştem coordonatele oricărui vector în baza canonică B_c = {E_1 = (1, 0, 0), E_2= (0, 1, 0), E_3= (0, 0, 1)}, vom începe algoritmul cu un tabel

Tabelul 1.5.3

B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
E_1	1	0	1	1	1	1
E_2	2	1	0	1	1	0
E_3	4	1	1	1	0	0
B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	1	1	1	1
E_2	0	1	-2	-1	-1	-2
E_3	0	1	-3	-3	-4	-4
B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	1	1	1	1
e_2	0	1	-2	-1	-1	-2
E_3	0	0	-1	-2	-3	-2
B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	0	-1	-2	-1
e_2	0	1	0	3	5	2
e_3	0	0	1	2	3	2

format în care coordonatele vectorilor e_1, e_2, e_3, u_1, u_2, u_3 sunt calculate relativ la baza canonică. Aplicând succesiv Lema substituţiei, vom înlocui toţi vectorii bazei canonice cu cei ai bazei B, rezultatele calculelor fiind redate în Tabelul 1.5.3.

În ultimele trei linii si respectiv coloane ale acestuia se pot citi coordonatele vectorilor din baza B' în baza B, adică matricea de trecere A de la baza B la B'. Deci A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Pentru a găsi coordonatele vectorului x în baza B' datele vor fi prelucrate conform tabelului de mai jos.

Tabelul 1.5.4

B	u_1	u_2	u_3	x
e_1	-1	-2	-1	-1
e_2	3	5	2	2
e_3	2	3	2	3
B	u_1	u_2	u_3	x
u_1	1	2	1	1
e_2	0	-1	-1	-1
e_3	0	-1	0	1
B	u_1	u_2	u_3	x
u_1	1	0	-1	-1
u_2	0	1	1	1
e_3	0	0	1	2
B	u_1	u_2	u_3	x
u_1	1	0	0	1
u_2	0	1	0	-1
u_3	0	0	1	2

2. Calculul inversei unei matrice.

Fie A o matrice inversabilă de ordinul *n*, cu elemente reale. Notăm cu C_A^i, i = 1,…,n, coloanele matricei A şi fie $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, i, j = 1,…,n.

Dacă I este matricea identică de ordinul n, atunci I = (E_1^T, …, E_i^T, …, E_n^T), unde $E_j = \underset{j}{(0,...,1,...0)}$, j = 1,…,n sunt vectorii bazei canonice din $\mathbf{R}^n$. Se observă că relaţia $AA^{-1} = I$ poate fi scrisă sub forma $\alpha_{1j}C_A^1 + \ldots + \alpha_{ij}C_A^i + \ldots + \alpha_{nj}C_A^n = E_j^T$, j = 1,…,n, ceea ce este echivalent cu faptul că elementele de pe coloana j a matricei inverse sunt coordonatele vectorului E_j al bazei canonice din $\mathbf{R}^n$ în baza formată din vectorii reprezentaţi [*)] de coloanele matricei A.

Exerciţiu: Să se arate că dacă A este o matrice de ordinul *n*, inversabilă atunci vectorii reprezentaţi de coloanele matricei A formează o bază în $\mathbf{R}^n$.

Exemplul 1.5.2 *Să se cerceteze dacă matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *este inversabilă şi în caz afirmativ să i se determine inversa.*

Aplicăm Lema substituţiei şi avem:

Tabelul 1.5.5

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	1	0	-1	2	1	0	0	0
E_2	0	1	2	-1	0	1	0	0
E_3	-1	2	0	1	0	0	1	0
E_4	2	-1	1	1	0	0	0	1
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4
C_A^1	1	0	-1	2	1	0	0	0
E_2	0	1	2	-1	0	1	0	0
E_3	0	2	-1	3	1	0	1	0
E_4	0	-1	3	-3	-2	0	0	1
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4

[*] prin vector din $\mathbf{R}^n$ corespunzător coloanei unei matrice cu n linii vom înţelege vectorul ale cărui componente sunt elementele coloanei respective.

C_A^1	1	0	-1	1	1	0	0	0
C_A^2	0	1	2	0	0	1	0	0
E_3	0	0	-5	1	1	-2	1	0
E_4	0	0	-4	-2	-2	1	0	1
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4
C_A^1	1	0	0	1	4/5	2/5	-1/5	0
C_A^2	0	1	0	1	2/5	1/5	2/5	0
C_A^3	0	0	1	-1	-1/5	2/5	-1/5	0
E_4	0	0	0	1	-1	-1	1	1
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4
C_A^1	1	0	0	0	9/5	7/5	-6/5	-1
C_A^2	0	1	0	0	7/5	6/5	-3/5	-1
C_A^3	0	0	1	0	-6/5	-3/5	4/5	1
C_A^4	0	0	0	1	-1	-1	1	1

Deoarece toți vectorii care constituie coloanele lui A au intrat în componența unei baze, deducem, conform Lemei substituției, că rangul matricei este egal cu dimensiunea acesteia, deci matricea este inversabilă. Inversa matricei A poate fi citită în ultimele 4 coloane ale tabelului de mai sus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & 7/5 & -6/5 & -1 \\ 7/5 & 6/5 & -3/5 & -1 \\ -6/5 & -3/5 & 4/5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculul rangului unei matrice.

Din Propoziția 1.2.1 se poate deduce că pentru a determina rangul unei matrice A cu *n* linii şi *m* coloane şi elemente numere reale este suficient să determinăm numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul de vectori format din coloanele matricei A.

Pentru a determina acest număr se poate folosi Lema substituției, înlocuind vectorii bazei canonice din $\mathbf{R}^n$, atât timp cât este posibil, cu vectorii corespunzători coloanelor matricei A. În momentul în care

înlocuirea vectorilor din bază, cu alţi vectori corespunzători coloanelor matricei A, nu mai este posibilă se obţine rangul matricei lui A, egal cu numărul vectorilor intraţi în bază.

Exemplul 1.5.3 *Să se determine rangul matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculele corespunzătore aplicării Lemei substituţiei se regăsesc în tabelul de mai jos.

Tabelul 1.5.6

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
E_1	1	0	1	2	1	-1
E_2	2	-1	0	1	0	1
E_3	-1	2	3	0	-1	0
E_4	0	5	10	3	-2	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
C_A^1	1	0	1	2	1	-1
E_2	0	-1	-2	-3	-2	3
E_3	0	2	4	2	0	-1
E_4	0	5	10	3	-2	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
C_A^1	1	0	1	2	1	-1
C_A^2	0	1	2	3	2	-3
E_3	0	0	0	-4	-4	5
E_4	0	0	0	-12	-12	15
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
C_A^1	1	0	1	0	-1	3/2
C_A^2	0	1	2	0	-1	3/4
C_A^4	0	0	0	1	1	-5/4
E_4	0	0	0	0	0	0

Conform celor spuse mai sus, rangul matricei este egal cu 3 deoarece doar trei dintre vectorii C_A^i , i $\in${1, 2, 3, 4, 5 ,6} au intrat în componența unei baze. Maximalitatea acestui număr este asigurată de Corolarul 1.3.1. Într-adevăr, vectorii C_A^1, C_A^2, C_A^4 vor constitui o bază pentru spațiul generat (se va vedea secțiunea 1.7 a acestui capitol) de vectorii C_A^i , i $\in${1, 2, 3, 4, 5, 6} și orice altă subfamilie formată din mai mult de 3 vectori va fi liniar dependentă.

4. Rezolvarea sistemelor liniare.

Considerăm un sistem liniar de forma $Ax = b$, unde A este o matrice cu n linii şi m coloane, $n, m \in \mathbf{N}^*$, cu elemente numere reale iar x şi b sunt matrice coloană cu m şi respectiv n elemente. Notăm cu $\overline{\mathrm{A}}$ matricea extinsă asociată sistemului (este matricea A la care se adaugă coloana b a termenilor liberi). Se cunosc următoarele rezultate:

1. Dacă rang A = rang $\overline{\mathrm{A}} =_{\mathrm{not}} r$ atunci sistemul este *compatibil.*

1a) Dacă $r = m$ (m este numărul de necunoscute) atunci sistemul este *compatibil determinat* (soluția există şi este unică).

1b) Dacă $r < m$ atunci sistemul este *compatibil nedeterminat* (sistemul are o infinitate de soluții).

2. Dacă rang A $\neq$ rang $\overline{\mathrm{A}}$ atunci sistemul este *incompatibil.*

Pentru a determina în care din situațiile de mai sus ne aflăm putem aplica Lema substituției. Astfel,

a) faptul că sistemul este incompatibil sau compatibil determinat sau nu (situațiile 1 şi 2 de mai sus) se poate stabili folosind metoda

prezentată în paragraful precedent pentru determinarea rangului matricei asociate sistemului şi respectiv matricei extinse.

b) dacă sistemul este compatibil determinat, este uşor de văzut că x^T reprezintă coordonatele vectorului b^T în baza formată din vectorii asociaţi coloanelor matricei A şi deci putem aplica Lema substituţiei pentru determinarea acestora.

c) dacă sistemul este compatibil nedeterminat, cu variabilele secundare $x_{k+1}, \ldots, x_m$ şi ecuaţiile principale corespunzătoare liniilor 1, 2, …, k ale matricei A (ordinea aceasta fiind obţinută în urma unei eventuale renumerotări), atunci obţinem sistemul

$$(1.5.2) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1m}x_m \\ . \\ . \\ b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - a_{km}x_m \end{pmatrix} =_{not} \beta.$$

Pentru a determina variabilele principale în funcţie de cele secundare se poate proceda ca în cazul b) prezentat mai sus.

Exemplul 1.5.4 *Să se rezolve sistemul scris sub formă matricială $Ax = b$, unde A este matricea de la Exemplul 1.5.3, $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ şi $b^T = (1, -2, 3, 0)$.*

În primul rând, studiem existenţa soluţiilor. Am stabilit deja în exemplul precedent că rangul matricei A este 3. Trebuie să calculăm şi rangul matricei extinse.

Tabelul 1.5.7

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
E_1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	2	-1	0	1	0	1	-2
E_3	-1	2	3	0	-1	0	3
E_4	0	5	10	3	-2	0	0

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	0	-1	-2	-3	-2	3	-4
E_3	0	2	4	2	0	-1	4
E_4	0	5	10	3	-2	0	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
C_A^2	0	1	2	3	2	-3	4
E_3	0	0	0	-4	-4	5	-4
E_4	0	0	0	-12	-12	15	-20
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	0	-1	3/2	-1
C_A^2	0	1	2	0	-1	3/4	1
C_A^4	0	0	0	1	1	-5/4	1
E_4	0	0	0	0	0	0	-8

Din tabelul de mai sus se deduce că vectorul b poate fi introdus în bază în locul vectorului E_4, deci rangul matricei extinse este 4. Deoarece rang A ≠ rang $\overline{\mathrm{A}}$ rezultă că sistemul este incompatibil.

Exemplul 1.5.5 *Să se rezolve sistemul de la Exemplul 1.5.4 în cazul în care $b^T = (1, -2, 3, 8)$. Aplicăm Lema substituţiei şi obţinem:*

Tabelul 1.5.8

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
E_1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	2	-1	0	1	0	1	-2
E_3	-1	2	3	0	-1	0	3
E_4	0	5	10	3	-2	0	8
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	0	-1	-2	-3	-2	3	-4
E_3	0	2	4	2	0	-1	4
E_4	0	5	10	3	-2	0	8
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
C_A^2	0	1	2	3	2	-3	4
E_3	0	0	0	-4	-4	5	-4
E_4	0	0	0	-12	-12	15	-12
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	0	-1	3/2	-1
C_A^2	0	1	2	0	-1	3/4	1

C_A^4	0	0	0	1	1	-5/4	1
E_4	0	0	0	0	0	0	0

În această situaţie este clar că rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, deoarece coordonata vectorului b corespunzătoare vectorului E_4 (în ultima bază) este 0 şi acesta nu va putea intra în locul lui E_4 într-o nouă bază. Deci sistemul este compatibil determinat.

Sistemul a cărui matrice (respectiv matrice extinsă) poate fi citită în primele 6 (respectiv 7) coloane şi ultimele 4 linii ale tabelului de mai sus va fi echivalent cu sistemul de la început, deoarece este obţinut numai prin transformări elementare (înmulţiri ale unei ecuaţii cu un scalar nenul şi adunarea acesteia cu o altă ecuaţie a sistemului).

În acest sistem, necunoscutele principale vor fi x_1, x_2, x_4 iar ecuaţiile principale vor fi ec 1, ec 2 şi ec 3.

Folosind relaţia (1.5.2) corespunzătoare noului sistem rezultat din tabelul de mai sus avem:

Tabelul 1.5.9

B	C_A^1	C_A^2	C_A^4	b
C_A^1	1	0	0	$-1-x_3+x_5-3/2x_6$
C_A^2	0	1	0	$1-2x_3+x_5-3/4x_6$
C_A^4	0	0	1	$1-x_5+5/4x_6$

Din ultimul tabel obţinem $x_1 = -1- x_3+ x_5 - 3/2x_6$, $x_2 = 1 - 2x_3 + x_5 - 3/4x_6$, $x_4 = 1 - x_5 + 5/4x_6$, $x_3, x_5, x_6 \in \mathbf{R}$. Acestea sunt soluţiile sistemului discutat.

4. Completarea unui familii de vectori liniar independenți din $\mathbf{R}^n$ la o bază. Este uşor de văzut că aplicarea de una sau mai multe ori a Lemei substituției reprezintă o altă demonstrație a Teoremei 1.3.3 (exercițiu).

Exemplul 1.5.6 *Se consideră familia de vectori din* $\boldsymbol{R}^6$, $F = \{v_1 = (1, 1, 1, 2, 2, 2), v_2 = (0, 2, 1, 3, 2, 1), v_3 = (1, 0, -1, 0, 1, -1)\}$. *Să se verifice dacă aceasta este liniar independentă şi în caz afirmativ să se completeze la o bază din* $\boldsymbol{R}^6$.

Vom aplica Lema substituției pentru a înlocui pe rând vectorii bazei canonice din $\boldsymbol{R}^6$ *cu vectorii familiei F.*

Dacă toți vectorii familiei F vor intra în componența unei baze atunci F este familie liniar independentă iar baza respectivă va constitui o soluție a problemei.

Tabelul 1.5.10

a)

B	v_1	v_2	v_3
E_1	1	0	1
E_2	1	2	0
E_3	1	1	-1
E_4	2	3	0
E_5	2	2	1
E_6	2	1	-1

b)

B	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	1
E_2	0	2	-1
E_3	0	1	-2
E_4	0	3	-2
E_5	0	2	-1
E_6	0	1	-3

c)

B	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	1
E_2	0	0	-1
v_2	0	1	-2
E_4	0	0	4
E_5	0	0	3
E_6	0	0	-1

d)

B	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	0
E_2	0	0	0
v_2	0	1	0
E_4	0	0	0
E_5	0	0	0
v_3	0	0	1

Din tabelul de mai sus rezultă că familia F este liniar independentă iar $B = \{v_1, v_2, v_3, E_2, E_4, E_5\}$ *este baza căutată.*

1.6 Subspaţii vectoriale

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K. În cele ce urmează vom introduce două definiţii echivalente pentru noţiunea de subspaţiu vectorial al spaţiului V.

Definiţia 1.6.1 *Se numeşte subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial V orice submulţime V_1 a acestuia, care împreună cu operaţiile de adunare a vectorilor şi respectiv de înmulţire a vectorilor cu scalari, definite pe V, capătă o structură de spaţiu vectorial peste corpul K.*

Definiţia 1.6.2 *O submulţime nevidă V_1 a lui V este un subspaţiu vectorial dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1) $x + y \in V_1$, *oricare ar fi* $x, y \in V_1$,

2) $\alpha x \in V_1$, *oricare ar fi* $x \in V_1$ *şi* $\alpha \in K$.

Teorema 1.6.1 *Definiţiile de mai sus sunt echivalente.*

Demonstraţie. Faptul că o submulţime a lui V, care este subspaţiu vectorial în sensul Definiţiei 1.6.1, este subspaţiu vectorial şi în sensul Definiţiei 1.6.2 rezultă imediat (demonstraţia este lăsată ca exerciţiu cititorului). Vom demonstra doar afirmaţia reciprocă.

Presupunem că submulţimea nevidă V_1 este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial V în sensul Definiţiei 1.6.2. Pentru a demonstra că este subspaţiu vectorial în sensul Definiţiei 1.6.1, vom verifica axiomele din Definiţia 1.1.3. Din condiţiile 1) şi 2) ale Definiţiei 1.6.2 rezultă că cele două operaţii ale spaţiului vectorial V sunt bine definite pe V_1. Proprietăţile de asociativitate şi comutativitate a adunării sunt adevărate,

deoarece au loc în V, deci şi în $V_1 \subseteq V$. Faptul că orice $x \in V_1$ are un opus tot în V_1 rezultă din condiția 2) în care luăm $\alpha = -1$ şi din Observația 1.1.2. Aplicând din nou condiția 2) deducem că 0, elementul neutru la adunare din V, aparține şi lui V_1, căci $0 = 0x \in V_1$ oricare ar fi $x \in V_1$, deci 0 este element neutru şi pentru operația de adunare a vectorilor din V_1.

În concluzie, V_1 este grup abelian cu operația de adunare a vectorilor. Axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 sunt verificate în mod evident (sunt consecințe ale condiției 2) şi ale ipotezei că V este spațiu vectorial). Deci V_1 este subspațiu vectorial în sensul Definiției 1.6.1.

Exemplul 1.6.1 *Submulțimea $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0), x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, 2, 3\}$ a lui $\boldsymbol{R}^4$ împreună cu operațiile cu operațiile de adunare a vectorilor şi înmulțire a acestora cu scalari, moştenite de pe $\boldsymbol{R}^4$, este un subspațiu vectorial al lui $\boldsymbol{R}^4$.*

Într-adevăr, dacă $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3, 0)$ sunt doi vectori din V_1 atunci $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, 0) \in V_1$, iar $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, 0) \in V_1$, oricare ar fi $\alpha \in K$. Atunci, conform Definiției 1.6.2, V_1 este subspațiu vectorial al lui $\boldsymbol{R}^4$.

Exemplul 1.6. 2 *Fie V un K spațiu vectorial. Întrregul spațiu vectorial V, precum şi mulțimea formată numai din vectorul nul din V sunt subspații vectoriale ale lui V. Ele se numesc* subspații improprii. *Celelalte subspații ale lui V se numesc* subspații proprii.

Observația 1.6.1 Fie V_1 un subspațiu propriu al spațiului vectorial finit dimensional V. Avem $\dim_K V_1 < \dim_K V$.

Într-adevăr, deoarece orice bază a lui V_1 este sistem liniar independent în V, aplicăm Teorema 1.3.2 şi rezultă concluzia. Dacă dimensiunile celor două spaţii vectoriale sunt egale, adică $\dim_K V_1 = \dim_K V$, atunci este clar $V_1 = V$ şi V_1 nu mai este spaţiu propriu.

Fie acum G o submulţime nevidă a spaţiului vectorial V. Vom nota $\overline{G}$ submulţimea tuturor combinaţiilor liniare formate cu vectori din G. Este clar că $\overline{G} \subseteq V$.

Teorema 1.6.2 *Mulţimea* $\overline{G}$*, împreună cu operaţiile definite pe V este un suspaţiu vectorial al acestuia.*

Demonstraţie. Fie x, y $\in \overline{G}$. Fiecare dintre cei doi vectori este o combinaţie liniară de vectori din G, deci şi suma lor va fi tot o combinaţie liniară de vectori din G. Analog se deduce că αx, $\alpha \in K$ este din $\overline{G}$. Folosind Definiţia 1.6.2, rezultă concluzia.

Subspaţiul $\overline{G}$ definit mai sus se numeşte *subspaţiul generat* de G sau *închiderea liniară* a lui G sau încă, *acoperirea liniară* a lui G.

Exemplul 1.6.3 *Fie* $G = \{x_1 = (1, 2, -1, 0), x_2 = (0, -1, 2, 5), x_3 = (1, 0, 3, 10), x_4 = (2, 1, 0, 3), x_5=(1, 0, -1, -2), x_6 = (-1, 1, 0, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^4$*. Să se determine o bază a subspaţiului generat de G.*

Conform definiţiei avem $\overline{G} = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha_6 x_6,\ \alpha_i \in \mathbf{R},\ i \in \{1,\ldots,6\}\}$*. Este clar că* $\{x_1, x_2,\ldots, x_6\}$ *este un sistem de generatori pentru* $\overline{G}$*. Din Exemplul 1.5.3, ştim că rangul matricei care are drept coloane componentele vectorilor* $x_1, x_2,\ldots, x_6$ *este egal cu 3. De aici deducem că doar trei dintre aceşti vectori sunt liniar independenţi, restul fiind combinaţii liniare ale acestor trei vectori. Folosind Propoziţia 1.2.1 şi rezultatele obţinute în exerciţiul amintit mai sus, rezultă că* x_1, x_2,

x_4 sunt liniar independenți. Deci $B = \{x_1, x_2, x_4\}$ este şi sistem de generatori pentru G şi, de aici, pentru $\overline{G}$. Astfel, B este o bază pentru $\overline{G}$.

Exemplul 1.6.4 *Fie V spațiul vectorial real definit în Exemplul 1.1.3. Submulțimea V_1 formată din totalitatea funcțiilor $f \in C^0([a, b])$ care sunt pare este un subspațiu vectorial al lui V. De asemenea mulțimea funcțiilor $f \in C^0([a, b])$, impare este un subspațiu vectorial al lui V.(Demonstrația afirmațiilor de mai sus sunt lăsate în seama cititorului.)*

Teorema 1.6.3 *Mulțimea vectorilor $x \in V$ ale căror coordonate satisfac un sistem liniar şi omogen de* n *ecuații cu* m *necunoscute şi rangul matricei sistemului egal cu* r *este un subspațiu vectorial de dimensiune* m - r.

Demonstrație. Fie V_1 mulțimea vectorilor $x \in V$ ale căror coordonate $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, într-o bază $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ a spațiului V, satisfac sistemul omogen de mai jos:

$$(1.6.1) \qquad \begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1m}\xi_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{im}\xi_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nm}\xi_m = 0 \end{array}$$

Este uşor de văzut că dacă $y = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \ldots + \eta_m u_m$ este un alt vector din V_1, atunci $(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_m + \eta_m)$ este tot o soluție a sistemului (1.6.1). Deci $x + y \in V_1$.

Analog se arată că $\alpha x \in V_1$, oricare ar fi $\alpha \in K$ şi V_1 este un subspațiu vectorial, conform Definiției 1.6.2.

Considerăm matricea $A = (a_{ij})_{i = 1..n,\ j = 1,..m}$ a sistemului. Presupunem că (eventual în urma unei renumerotări) un minor nenul de ordinul *r* ce dă

rangul matricei A se află la intersecţia primelor *r* linii şi r coloane ale acesteia. Atunci $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sunt variabile principale iar restul vor fi secundare. Sistemul din care eliminăm ecuaţiile secundare se scrie

$$a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1r}\xi_r = - a_{1r+1}\xi_{r+1} - \ldots - a_{1m}\xi_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{ir}\xi_r = - a_{ir+1}\xi_{r+1} - \ldots - a_{im}\xi_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{r1}\xi_1 + a_{r2}\xi_2 + \ldots + a_{rr}\xi_r = - a_{rr+1}\xi_{r+1} - \ldots - a_{rm}\xi_m.$$

Fiind un sistem compatibil determinat în necunoscutele $\xi_1, \ldots, \xi_r$ se va determina $\xi_1 = b_{11}\xi_{r+1} + \ldots + b_{1m-r}\xi_m$, $\ldots, \xi_i = b_{i1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{im-r}\xi_m, \ldots, \xi_r = b_{r1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{rm-r}\xi_m$. Atunci vectorul x se scrie

$$x = (b_{11}\xi_{r+1} + \ldots + b_{1m-r}\xi_m)u_1 + \ldots + (b_{i1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{im-r}\xi_m)u_i + \ldots + (b_{r1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{rm-r}\xi_m)u_r + \xi_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \xi_m u_m.$$

Avem $x = \xi_{r+1}(b_{11}\, u_1 + \ldots + b_{i1}u_i + \ldots + b_{r1}\, u_r + u_{r+1}) + \ldots + \xi_{r+j}(b_{1j}\, u_1 + \ldots + b_{ij}u_i + \ldots + b_{rj}\, u_r + u_{r+j}) + \ldots + \xi_m(b_{1m-r}\, u_1 + \ldots + b_{im-r}u_i + \ldots + b_{rm-r}\, u_r + u_m)$.

Notăm $v_j = b_{1j}\, u_1 + \ldots + b_{ij}u_i + \ldots + b_{rj}\, u_r + u_{r+j}$, $j = 1, \ldots, m-r$ şi observăm că $S = \{v_j, j = 1, \ldots, m-r\}$ este un sistem de generatori pentru V_1.

Pentru a termina demonstraţia este suficient să arătăm că S este sistem liniar independent. Fie $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + \ldots + \alpha_{m-r}v_{m-r} = 0$ o combinaţie nulă formată cu vectorii mulţimii S. Avem

$$\alpha_1(b_{11}\, u_1 + \ldots + b_{i1}u_i + \ldots + b_{r1}\, u_r + u_{r+1}) + \ldots +$$

$$\alpha_j(b_{1j}\, u_1 + \ldots + b_{ij}u_i + \ldots + b_{rj}\, u_r + u_{r+j}) + \ldots +$$

$$\alpha_{m-r}(b_{1m-r}\, u_1 + \ldots + b_{im-r}u_i + \ldots + b_{rm-r}\, u_r + u_m) = 0.$$

Rearanjând termenii obţinem

$$(\alpha_1 b_{11} + \ldots + \alpha_j b_{1j} + \ldots + \alpha_{m-r}b_{rm-r})u_1 + \ldots +$$

$$(\alpha_1 b_{i1} + \ldots + \alpha_j b_{ij} + \ldots + \alpha_{m-r}b_{im-r})u_i + \ldots +$$

$(\alpha_1 b_{r1} + \ldots + \alpha_j b_{rj} + \ldots + \alpha_{m-r} b_{rm-r})u_r + \ldots + \alpha_1 u_{r+1} + \ldots + \alpha_j u_{r+j} + \alpha_{m-r} u_m = 0$. Ținând cont de faptul că B este, în particular, sistem liniar independent, deducem că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-r} = 0$.

De aici rezultă că S este sistem liniar independent şi fiind şi sistem de generatori pentru V_1 este bază. Dimensiunea subspațiului vectorial V_1 este egală cu numărul vectorilor din S, adică cu *m - r*.

Definiția 1.6.3 *Fie V un spațiu vectorial de dimensiune* n *şi* V_1 *un subspațiu al său de dimensiune* m < n *şi* $x_0 \in V$, $x_0 \notin V_1$ *fixat. Mulțimea vectorilor de forma* $x = x_0 + z$, $z \in V_1$ *se numeşte varietate liniară.*

Se observă că o varietate liniară nu este un subspațiu vectorial deoarece nu conține vectorul nul al spațiului.

1.7 Intersecții şi sume de subspații vectoriale

Fie V_1 şi V_2 două subspații vectoriale ale aceluiaşi K - spațiu vectorial V.

Definiția 1.7.1 *Intersecția subspațiilor* V_1 *şi* V_2 *este mulțimea I formată din vectorii comuni celor două subspații:*

$x \in I$ dacă şi numai dacă $x \in V_1$ şi $x \in V_2$.

Definiția 1.7.2 *Suma subspațiilor* V_1 *şi* V_2 *este mulțimea S a vectorilor de forma* $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, *adică*

$$S = \{x \in V,\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}.$$

Facem observația că pentru intersecția, respectiv suma subspațiilor vectoriale V_1 şi V_2 se mai foloseşte şi notația $V_1 \cap V_2$, respectiv $V_1 + V_2$.

Teorema 1.7.1 *Dacă V_1 şi V_2 sunt două subspaţii vectoriale ale aceluiaşi K -spaţiu vectorial V, atunci intersecţia acestora, $V_1 \cap V_2$, şi suma lor, $V_1 + V_2$, sunt subspaţii vectoriale ale lui V.*

Demonstraţie. Pentru început demonstrăm că intersecţia $V_1 \cap V_2$ este subspaţiu vectorial. Fie $x, y \in V_1 \cap V_2$ şi $\alpha \in K$. Atunci, conform Definiţiei 1.7.1, $x, y \in V_1$ şi $x, y \in V_2$. Deci $x + y \in V_1$, $x + y \in V_2$, $\alpha x \in V_1$ şi $\alpha x \in V_2$. De aici rezultă că $x + y$, $\alpha x \in V_1 \cap V_2$. Aplicăm Definiţia 1.6.2 şi deducem că $V_1 \cap V_2$ este subspaţiu vectorial al lui V.

Acum vom demonstra că $V_1 + V_2$ este subspaţiu vectorial. Fie $x, y \in V_1 + V_2$ şi $\alpha \in K$. Din Definiţia 1.7.2 rezultă că există $x_1, y_1 \in V_1$ şi $x_2, y_2 \in V_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$ şi respectiv $y = y_1 + y_2$.

Se observă că $x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$, şi cum $x_1 + y_1 \in V_1$ iar $x_2 + y_2 \in V_2$ (V_1 şi V_2 fiind subspaţii vectoriale), deducem că $x + y \in V_1 + V_2$.

Mai trebuie să arătăm că $\alpha x \in V_1 + V_2$ şi demonstraţia este încheiată. Avem $\alpha x = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, conform axiomei d) din definiţia spaţiului vectorial. Deoarece $\alpha x_1 \in V_1$ iar $\alpha x_2 \in V_2$, este clar că $\alpha x \in V_1 + V_2$.

Observaţia 1.7.1 Dacă $V_1 + V_2$ este suma subspaţiilor vectoriale V_1 şi V_2 atunci se poate spune că $V_1 + V_2$ este "cel mai mic subspaţiu" care le conţine. Altfel spus, dacă S_1 este un alt subspaţiu al spaţiului V astfel încât $V_1 \subset S_1$, $V_2 \subset S_1$, atunci $V_1 + V_2 \subset S_1$. Pe de altă parte subspaţiul intersecţie este "cel mai mare " subspaţiu inclus în cele două subspaţii în sensul că dacă I_1 este un alt subspaţiu astfel încât $I_1 \subset V_1$ şi $I_1 \subset V_2$

atunci $I_1 \subset V_1 \cap V_2$. Între subspațiile sumă şi intersecție există următoarea relație: $V_1 \cap V_2 \subset V_1 + V_2$.

Observația 1.7.2 Noțiunea de sumă a subspațiilor vectoriale se poate extinde la un număr *n* de subspații V_1 , V_2 ,…, V_n ale spațiului vectorial V astfel: "Submulțimea S (notată şi $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$) a lui V, definită prin $S = \{x \in V$, există $x_i \in V_i$, $i = 1,\ldots,n$ astfel încât $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\}$, se numeşte suma subspațiilor V_1 , V_2 ,…, V_n." În acelaşi mod ca şi în cazul n = 2 se poate demonstra că S este un subspațiu vectorial al lui V.

Observația 1.7.3 Scrierea unui vector $x \in V_1 + V_2$ ca o sumă de doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2 nu este neapărat unică. De exemplu, dacă $V_1 \cap V_2 \neq (0)$, atunci există $y \in V_1 \cap V_2$, $y \neq 0$. Dacă $x = x_1 + x_2$, atunci luăm $y_1 = x_1 - y \in V_1$ şi $y_2 = x_2 - y \in V_2$ şi observăm că $x = y_1 + y_2$. În mod clar $y_1 \neq x_1$, $y_2 \neq x_2$ şi astfel am obținut două scrieri diferite ale lui x ca sumă de doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2.

Definiția 1.7.3 *Spunem că suma S a subspațiilor vectoriale V_1 şi V_2 este directă dacă şi numai dacă orice vector $x \in S$ se scrie în mod unic ca o sumă de doi vectori unul din V_1 şi unul din V_2. În acest caz vom nota $S = V_1 \oplus V_2$.*

Observația 1.7.4 Ca şi în Observația 1.7.2, definiția de mai sus poate fi extinsă la cazul a *n* subspații vectoriale: "Spunem că suma S a subspațiilor vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_n$ este directă dacă şi numai dacă orice vector $x \in S$ se scrie în mod unic ca o sumă de vectori din V_i, $i = 1,\ldots,n$. Vom folosi notația $S = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ "

Teorema de mai jos furnizează condiţii necesare şi sufieciente pentru ca suma a două subspaţii vectoriale să fie directă.

Teorema 1.7.2 *Fie V_1 şi V_2 două subspaţii vectoriale ale spaţiului V. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) $S = V_1 \oplus V_2$;

2) $I = (0)$.

Demonstraţie. " 1) $\Rightarrow$ 2)". Presupunem prin absurd că $I \neq (0)$. Folosind raţionamentul din Observaţia 1.7.3, rezultă că scrierea lui x ca o sumă de doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2 nu este unică, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea făcută este falsă şi $I = (0)$.

" 2) $\Rightarrow$ 1)" Fie $x \in S$ şi $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in V_1$, $x_2, y_2 \in V_2$ două scrieri ale lui x ca sumă de doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2. Observăm că $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = y$ şi, folosind proprietăţile subspaţiilor vectoriale V_1 şi V_2 , rezultă că $y \in V_1$ şi $y \in V_2$. Deci $y \in I = (0)$. În consecinţă, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, adică scrierea lui x ca sumă de doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2 este unică. Din Definiţia 1.7.3 rezultă concluzia.

Teorema 1.7.3 *Dacă $B_1 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$, respectiv $B_2 = \{v_1, v_2,\ldots,v_k\}$, sunt baze în subspaţiile V_1 , respectiv V_2, iar $V_1 \cap V_2 = (0)$ atunci $B_1 \cup B_2$ este o bază în $V_1 \oplus V_2$.*

Demonstraţie. Este uşor de văzut că, în general, dacă G_1, G_2 sunt sisteme de generatori pentru V_1 şi V_2 atunci $G_1 \cup G_2$ este sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. De aici se deduce că într-adevăr $B_1 \cup B_2$ este sistem de generatori pentru $V_1 \oplus V_2$.

Pentru a termina demonstrația este suficient să arătăm că $B_1 \cup B_2$ este sistem liniar independent. Dacă $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k = 0$ este o combinație nulă formată cu vectorii familiei $B_1 \cup B_2$ atunci $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \ldots - \beta_k v_k \in V_1 \cap V_2 = (0)$.

De aici obținem

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = 0,$$
$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k = 0 \text{ şi,}$$

ținând cont că B_1 şi B_2 sunt în particular sisteme liniar independente, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$. Am obținut concluzia.

Teorema 1.7.4 *Dacă V_1 este un subspațiu vectorial al K-spațiului vectorial V, atunci există în V un subspațiu vectorial V_2 astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$. V_2 se va numi subspațiul complementar al lui V_1 în V sau complementul algebric al lui V_1.*

Demonstrație. Fie $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ o bază în V_1. Deoarece B_1 este familie liniar independentă în V, atunci ea poate fi extinsă la o bază în V (vezi Teorema 1.3.3). Fie acum $B = \{ u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ o bază în V, $p + k = n$, şi fie V_2 subspațiul vectorial generat de familia $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Vom demonstra că V_2 este un subspațiu care satisface cerințele din teoremă.

Din modul de construcție al lui V_2, rezultă imediat că $V = V_1 + V_2$. Mai trebuie să arătăm că suma este directă. Fie $y \in V_1 \cap V_2$. Atunci există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ şi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ scalari din K astfel încât $y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k$. De aici obținem $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \ldots - \beta_k v_k = 0$ şi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$,

căci B este bază (în particular, sistem liniar independent). Deci y = 0, de unde $V_1 \cap V_2 = (0)$. Conform Teoremei 1.7.2, suma subspaţiilor V_1 şi V_2 este directă.

Observaţia 1.7.5 Subspaţiul complementar nu este unic determinat deoarece, conform demonstraţiei de mai sus, completarea unei baze din V_1 la o bază în V se poate realiza într-o infinitate de moduri. Însă dimensiunea subspaţiul complementar este unic determinată, fiind egală cu diferenţa dintre dimensiunea spaţiului V şi cea a subspaţiului V_1.

Teorema 1.7.5 (Grassmann) *Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K şi V_1, V_2 două subspaţii ale sale. Atunci*

$$\dim_K(V_1+V_2) + \dim_K(V_1 \cap V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2.$$

Demonstraţie. Fie $B_0 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$ o bază în $I = V_1 \cap V_2$. Deoarece $I \subset V_1$ şi $I \subset V_2$, vom extinde această bază, conform Teoremei 1.3.3, la câte o bază în V_1 şi respectiv V_2, obţinând bazele $B_1 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p, f_{p+1}, f_{p+2},\ldots,f_{p+r}\}$ şi respectiv $B_2 = \{u_1, u_2,\ldots, u_p, v_{p+1}, v_{p+2},\ldots, v_{p+k}\}$.

Vom arăta că $B = \{u_1, u_2,\ldots,u_p, f_{p+1}, f_{p+2},\ldots,f_{p+r}, v_{p+1}, v_{p+2},\ldots,v_{p+k}\}$ este o bază în $V_1 + V_2$. Raţionănd ca în demonstraţia Teoremei 1.7.3, rezultă că B este un sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Trebuie să mai arătăm că B este sistem liniar independent. Facem o combinaţie liniară nulă cu vectorii familiei B şi cu scalari din K. Avem

$$\begin{aligned}(1.7.1)\quad & \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \ldots + \alpha_pu_p + \beta_1v_{p+1} + \beta_2v_{p+2} + \ldots + \beta_kv_{p+k} + \\ & \gamma_1f_{p+1} + \gamma_2f_{p+2} + \ldots + \gamma_rf_{p+r} = 0.\end{aligned}$$

Deci $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \ldots + \alpha_pu_p + \beta_1v_{p+1} + \beta_2v_{p+2} + \ldots + \beta_kv_{p+k} =$

$$-\gamma_1f_{p+1} - \gamma_2f_{p+2} - \ldots - \gamma_rf_{p+r} =_{not} z \in V_1 \cap V_2.$$

De aici şi din faptul că B_0 este bază în $V_1 \cap V_2$ rezultă că *z* se scrie în mod unic ca o combinaţie de vectori ai familiei B_0.

Deci există scalarii ζ_i, $i = 1,\dots,p$ astfel încât $z = \zeta_1u_1 + \zeta_2u_2 + \dots + \zeta_pu_p$. Din ultimele două relații, rezultă că $\zeta_1u_1 + \zeta_2u_2 + \dots + \zeta_pu_p = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_pu_p + \beta_1v_{p+1} + \beta_2v_{p+2} + \dots + \beta_kv_{p+k}$.

Deoarece vectorul $z \in V_2$ are coordonate unice în baza B_2, deducem că $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ şi $\alpha_i = \zeta_i$, oricare ar fi $i = 1,.., p$.

Înlocuind valorile β_i, $i = 1,\dots,k$ găsite mai sus în relația (1.7.1) şi ținând cont de faptul că B_1 este sistem liniar independent, deducem că $\alpha_i = 0$, $i = 1,\dots, p$ şi $\gamma_i = 0$, $i = 1,\dots, r$. Astfel am demonstrat că toți coeficienții din relația (1.7.1) sunt nuli, deci B este sistem liniar independent. Demonstrația a fost încheiată.

Exemplul 1.7.1 *Se consideră subspațiile V_1 şi V_2 ale spațiului $\boldsymbol{R}^5$ generate de familiile de vectori $G_1 = \{x_1 = (1, 0, 1, 3, 2), x_2 = (-1, 2, 0, 1, 0)\}$ şi respectiv $G_2 = \{y_1 = (0, 0, 1, -1, 1), y_2 = (-1, 0, 0, 1, 0), y_3 = (1, 2, 0, 1, 1)\}$. Să se găsească câte o bază pentru spațiile sumă şi respectiv intersecție, dacă aceste sunt nenule.*

În ceea ce priveşte spațiul sumă, $V_1 + V_2$, ştim că acesta este generat de $G_1 \cup G_2$, deci $V_1 + V_2 = \{x \in V, x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3, \alpha_i, \beta_j \in \boldsymbol{R}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$.

Pentru a găsi o bază este suficient să determinăm o subfamilie maximală de vectori liniar independenți a lui $G_1 \cup G_2$, aşa cum rezultă din demonstrația Teoremei 1.3.1. Aplicând succesiv Lema substituției, vom înlocui vectorii din baza canonică cu vectori ai familiei $G_1 \cup G_2$ atât timp cât este posibil, adică atât timp cât există vectori din $G_1 \cup G_2$, care nu au intrat încă în componența bazei, şi care au coordonate nenule în liniile corespunzătoare vectorilor din baza canonică, ce nu au fost încă

eliminaţi. Dacă această condiţie nu mai este satisfăcută, atunci este clar că vectorii din $G_1 \cup G_2$ care nu au intrat în componenţa bazei sunt combinaţii liniare de vectorii din $G_1 \cup G_2$ care au intrat. Deci acei vectori intraţi în bază sunt sistem de generatori pentru $G_1 \cup G_2$; fiind şi sistem liniar independent, formează o bază pentru $V_1 + V_2$.

Tabelul 1.7.1

B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
E_1	1	-1	0	-1	1
E_2	0	2	0	0	2
E_3	1	0	1	0	0
E_4	3	1	-1	1	1
E_5	2	0	1	0	1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	-1	0	-1	1
E_2	0	2	0	0	2
E_3	0	1	1	1	-1
E_4	0	4	-1	4	-2
E_5	0	2	1	2	-1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	1	0	0
E_2	0	0	-2	-2	4
x_2	0	1	1	1	-1
E_4	0	0	-5	0	2
E_5	0	0	-1	0	1

B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	1	0	0
E_2	0	0	2	-2	0
x_2	0	1	0	1	0
E_4	0	0	-3	0	0
y_3	0	0	-1	0	1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0	0	0
E_2	0	0	0	-2	0
x_2	0	1	0	1	0
y_1	0	0	1	0	0
y_3	0	0	0	0	1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0	0	0
y_2	0	0	0	1	0
x_2	0	1	0	0	0
y_1	0	0	1	0	0
y_3	0	0	0	0	1

Analizând tabelul de mai sus, rezultă că $G_1 \cup G_2$ formează o bază, deci subspaţiul $V_1 + V_2$ are dimensiunea 5. Din Observaţia 1.6.1, deducem că $V_1 + V_2$ coincide cu $\boldsymbol{R}^5$. Tot din tabelul de mai sus deducem că G_1 şi G_2 sunt familii liniar independente, deci sunt baze pentru spaţiile generate V_1 şi V_2. Astfel $\dim_{\mathbf{R}} V_1 = 2$ şi $\dim_{\mathbf{R}} V_2 = 3$. Aplicând teorema lui Grassmann avem $\dim_{\mathbf{R}}(V_1 \cap V_2) = \dim_{\mathbf{R}} V_1 + \dim_{\mathbf{R}} V_2 - \dim_{\mathbf{R}}(V_1 + V_2) = 0$. Deci $V_1 \cap V_2 = (0)$.

1.8 Exerciții

1. Fie K un corp de caracteristică 0 şi V = K x K. Să se verifice dacă V împreună cu operațiile

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in K \text{ x } K$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0),\ \alpha \in K$$

are o structură de spațiu vectorial peste corpul K.

R: Nu, deoarece nu este verificată axioma a) din Definiția 1.1.3.($1(x_1, x_2) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$).

2. Considerăm mulțimea $\mathbf{R}^4$ împreună cu operațiile

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + 2y_1, x_2 + 2y_2, x_3 + 2y_3, x_4 + 2y_4),$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se verifice dacă aceasta are o structură de spațiu vectorial peste corpul **R**.

R: Nu, deoarece operația "+" nu este comutativă.

3. Fie mulțimea $\mathbf{R}^2$ pentru care definim operațiile

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (2x_1 + 2y_1, 2x_2 + 2y_2),\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se studieze dacă $\mathbf{R}^2$ este spațiu vectorial real.

R: Nu, deoarece operația "+" nu are element neutru.

4. Să se demonstreze că mulțimea matricelor cu *n* linii şi *m* coloane şi elemente reale, $M_{nm}(\mathbf{R})$, împreună cu operațiile de adunare a matricelor şi înmulțire a acestora cu numere reale are o structură de spațiu vectorial real. Să se determine o bază a acestui spațiu.

R: Se verifică axiomele Definiţiei 1.1.3. Definim matricele $E_{i,j} \in M_{nm}(\mathbf{R})$ astfel $E_{i,j} =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

. Familia $B = \{ E_{i,j}, \ i = 1,\dots, n,\ j = 1,\dots,m\}$ este o bază în $M_{nm}(\mathbf{R})$.

5. Să se stabilească dacă familiile de vectori de mai jos sunt liniar independente în spaţiile vectoriale corespunzătoare.

a) $\{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\}$ în spaţiul vectorial real $M_3(\mathbf{R})$.

b) $\{x_1 = (-1, 1, 2, 3),\ x_2 = (0, 1, 2, 3),\ x_3 = (1, -1, 2, 3)\}$ în $\mathbf{R}^4$.

c) $\{p_1 = t^2 + t + 1\ ,\ p_2 = t + 1,\ p_3 = 2t^2 + t + 1\}$ în spaţiul P(t) al polinoamelor de orice grad, în nedeterminata t şi cu coeficienţi reali (vezi Exemplul 1.1.5).

d) $\{y_1 = (1, i, 0, 1),\ y_2 = (2, 0, 1 + i, 3),\ y_3 = (4 + i, 0, 0, 1)\}$ în spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^4$.

R: a) Nu. b) Da. c) Nu. d) Da.

6. Să se demonstreze că mulţimea numerelor complexe dotată cu operaţiile de adunare a numerelor complexe şi înmulţire a numerelor reale cu numere complexe are o structură de spaţiu vectorial real.

Indicaţie: Se verifică axiomele din Definiţia 1.1.3.

7. Să se calculeze $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}$ şi respectiv $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

R: Se observă că {1} este o bază în spațiul vectorial **C** considerat peste el însuşi în timp ce {1, i} este o bază în spațiul vectorial **C** considerat peste corpul numerelor reale. Deci $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 1$ iar $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$.

8. Să se demonstreze că $B_1 = \{u_1 = (1, 1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0, 0), u_3 = (3, 2, 1, 1, 0), u_4 = (0, 0, 1, 1, 1), u_5 = (1, 0, 0, 0, 0)\}$ şi respectiv $B_2 = \{v_1 = (1, 1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1, 0), v_3 = (2, 0, 1, 0, 2), v_4 = (1, 0, 1, 1, 1), v_5 = (0, 1, 1, 1, 1)\}$ sunt baze în $\mathbf{R}^5$ şi să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2. Dacă (1, 1, 1, 1, 1) sunt coordonatele unui vector x în baza B_1 să se determine coordonatele acestuia în baza B_2.

R: Fie $E_1, E_2, \ldots, E_5$ o bază canonică în $\mathbf{R}^5$. Aplicând Lema substituției obținem:

B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
E_1	1	1	3	0	1	1	0	2	1	0
E_2	1	0	2	0	0	1	1	0	0	1
E_3	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
E_4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	1	3	0	1	1	0	2	1	0
E_2	0	-1	-1	0	-1	0	1	-2	-1	1
E_3	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
E_4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	1	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	2	-1	1	0	0	1	0	-1
E_2	0	0	0	1	-1	1	1	-1	0	2
u_2	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
E_4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	1	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	0	-3	1	0	-2	1	-2	-3
E_2	0	0	0	1	-1	1	1	-1	0	2
u_2	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
u_3	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1

B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	0	0	1	0	-2	7	1	0
E_2	0	0	0	0	-1	1	1	-3	-1	1
u_2	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
u_3	0	0	1	0	0	0	1	-2	0	0
u_4	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	0	0	0	1	-1	4	0	1
u_5	0	0	0	0	1	-1	-1	3	1	-1
u_2	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
u_3	0	0	1	0	0	0	1	-2	0	0
u_4	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1

Matricea de trecere este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Coordonatele vectorului x în baza B_2 se determină folosind formula (1.4.2). Avem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & 3/2 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & -1/2 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 1/2 & 3/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 & -3/2 & 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 \\ 5/2 \\ 3/4 \\ 7/4 \\ -9/4 \end{pmatrix}.$$

9. Să se determine subspaţiile generate de următoarele familii de vectori. Să se găsească câte o bază în aceste subspaţii şi să se precizeze dimensiunea lor.

a) $G_1 = \{p_1 = t^2 + t + 1\ ,\ p_2 = t + 1,\ p_3 = t^3\} \subset P(t)$,

b) $G_2 = \{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\} \subset M_2(\mathbf{R})$

c) $G_3 = \{x_1 = (1, -1, 2, 3), x_2 = (0, 1, 1, 1), x_3 = (1, 2, -1, 1), x_4 = (2, 2, 2, 4)\} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $G_4 = \{y_1 = (1, i, 1), y_2 = (1 + i, 0, 1), y_3 = (1, i, 1)\} \subset \mathbf{C}^3$, unde $\mathbf{C}^3$ este considerat spaţiu vectorial real.

R: a) Familia G_1 este liniar independentă, deci este bază pentru spaţiul generat $\overline{G}_1$. Avem $\overline{G}_1 = \{\alpha t^3 + \beta t^2 + (\beta + \gamma)t + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$, iar $\dim_{\mathbf{R}} \overline{G}_1 = 3$.

b) Se constată că familia G_2 este liniar independentă, fiind la rândul ei bază pentru spaţiul generat $\overline{G}_2$. Deoarece $\dim_{\mathbf{R}} \overline{G}_2 = 4 = \dim_{\mathbf{R}} M_2(\mathbf{R})$, deducem că $\overline{G}_2 = M_2(\mathbf{R})$, conform Observaţiei 1.6.1.

c) Rangul matricei care pe coloane componentele vectorilor din familia G_3 este 4. Atunci rezultă, conform Propoziţiei 1.2.1, că familia G_3 este liniar independentă şi deci este bază în $\overline{G}_3$. Ca şi în cazul punctului b) se deduce că $\overline{G}_3 = \mathbf{R}^4$.

d) Deoarece relaţia $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul $\beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$, care are şi alte soluţii în afara soluţiei nule, rezultă că familia G_4 este liniar dependentă. Se observă că $\{y_1, y_2\}$ este sistem liniar independent şi fiind şi sistem de generatori pentru G_4 este o bază pentru $\overline{G}_4$. Deci $\dim_{\mathbf{R}} \overline{G}_4 = 2$, iar $\overline{G}_4 = \{\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

10. Se consideră familia de vectori G_2 de la exerciţiul 9 despre care s-a demonstrat că este o bază a spaţiului vectorial real $M_2(\mathbf{R})$. Să se arate că familia $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ este de asemenea o bază pentru $M_2(\mathbf{R})$ şi să se determine matricea de trecere de la G_2 la B.

R: Deoarece ecuaţia vectorială $\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 + \delta D_1 = 0$ admite doar soluţia nulă $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, rezultă că B este un sistem liniar independent în $M_2(\mathbf{R})$. Este uşor de văzut că acesta este şi sistem de generatori, deci este o bază pentru $M_2(\mathbf{R})$. Elementele

matricei de trecere de la baza G_2 la baza B sunt soluţiile sistemului de ecuaţii vectoriale

$$A_1 = m_{11}A + m_{12}B + m_{13}C + m_{14}D$$
$$B_1 = m_{21}A + m_{22}B + m_{23}C + m_{24}D$$
$$C_1 = m_{31}A + m_{32}B + m_{33}C + m_{34}D$$
$$D_1 = m_{41}A + m_{42}B + m_{43}C + m_{44}D.$$

Rezolvând sistemul de mai sus obţinem matricea de trecere

$$M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Să se verifice dacă mulţimile de mai jos sunt subspaţii vectoriale şi în caz afirmativ să se determine câte o bază pentru acestea.

a) $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3\} \subset \mathbf{R}^4$

b) $V_2 = \{ x \in \mathbf{R}^3 , x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

c) $V_3 = \{x \in \mathbf{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

d) $V_4 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1 + x_2 - x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^4$.

R: a) Da, V_1 este subspaţiu vectorial, deoarece sunt verificate condiţiile Definiţiei 1.6.2. Dacă $E_1 = (1, 0, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1, 0)$, $E_4 = (0, 0, 0, 1)$ sunt vectorii bazei canonice în $\mathbf{R}^4$ atunci este uşor de văzut că $\{E_1, E_2, E_3\}$ este o bază pentru V_1.

b) V_2 nu este subspaţiu vectorial. Într-adevăr dacă $x, y \in V_2$ atunci avem $x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$, $y_1 + y_2 - y_3 + 1 = 0$ şi de aici $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3 + 2 = 0$. Se observă că dacă $x + y \in V_2$, atunci avem $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3 + 1 = 0$. Din ultimele două relaţii deducem că $2 = 1$, ceea ce este absurd. Deci $x + y \notin V_2$ şi având în vedere Definiţia 1.6.2 rezultă concluzia.

c) V_3 este spaţiu vectorial, conform Teoremei 1.6.3. Rezolvând sistemul

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, deducem că $V_3 = \{\alpha(1/3, -2/3,1), \alpha \in \mathbf{R}\}$. O bază a lui V_3 este $\{(1/3, -2/3,1)\}$, dimensiunea lui fiind egală cu 1.

d) Răspunsul este afirmativ, conform Teoremei 1.6.3. Procedând ca mai sus, deducem că $V_4 = \{\alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(0, 1, 1, 1), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Deoarece familia de vectori $\{ e_1 = (1, 0, 1, 1), e_2 = (0, 1, 1, 1) \}$ este liniar independentă, fiind în acelaşi timp sistem de generatori pentru V_4, rezultă că aceasta reprezintă o bază pentru V_4 iar $\dim_{\mathbf{R}} V_4 = 2$.

12. Fie V_1 spațiul generat de familia $F = \{ x_1 = (-1, 0, 1, 0), x_2 = (1, 1, 1, 0), x_3 = (0, 1, 2, 0)\} \subset \mathbf{R}^4$ şi V_2 spațiul generat de familia $G = \{ y_1 = (1, 1, 0, 0), y_2 = (1, 1, -1, 0)\} \subset \mathbf{R}^4$. Să se determine subspațiile $V_1 + V_2$ şi respectiv $V_1 \cap V_2$, precizând câte o bază pentru acestea precum şi pentru V_1 şi V_2.

R: Se cunoaşte faptul că $F \cup G$ este un sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Deoarece familia $\{x_1, x_2, y_1\}$ este un sistem liniar independent maximal în $F \cup G$ deducem că acesta este sistem de generatori pentru $F \cup G$, deci bază $V_1 + V_2$. Dimensiunea lui $V_1 + V_2$ este egală cu 3. În acelaşi mod se poate stabili că $\{x_1, x_2\}$ şi respectiv $\{y_1, y_2\}$ sunt baze pentru V_1 şi respectiv V_2, dimensiunile acestor subspații fiind egale cu 2. Aplicând teorema lui Grassmann se deduce că $\dim_{\mathbf{R}} V_1 \cap V_2 = 1$. Pentru a determina $V_1 \cap V_2$, observăm că $V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4$, există numerele reale a, b, α, β, γ astfel încât $ay_1 + by_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3\}$. Rezolvând ecuația vectorială încât $ay_1 + by_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ cu necunoscutele a, b, α, β, γ, care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{aligned} a + b + \alpha - \beta \quad &= 0 \\ a + b \quad - \beta - \gamma &= 0 \\ - b - \alpha - \beta - 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Obținem $a = 2\beta + 2\gamma$, $b = \beta + \gamma$, $\alpha = 2\beta + 3\gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Deci

$V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (2\beta + 2\gamma)\, y_1 + (\beta + \gamma)y_2,\ \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$ sau

$V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (\beta + \gamma)(3, 3, -1, 0), \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$. Se observă că $\{(3, 3, -1, 0)\}$ este o bază pentru $V_1 \cap V_2$.

13. Să se determine câte un complement algebric pentru fiecare din subspaţiile proprii de la exerciţiile 11 şi 12.

R: Ex. 11 a) . Am văzut că $\{E_1, E_2, E_3\}$ este o bază pentru V_1. Atunci subspaţiul vectorial generat de E_4 este un complement algebric al lui V_1, conform demonstraţiei Teoremei 1.7.4.

Ex 11 c). Deoarece $\{e_1 = (1/3, -2/3, 1)\}$ este o bază a spaţiului V_3 se observă că $\{e_1, E_2, E_3\}$, unde $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$, este o bază pentru $\mathbf{R}^3$. Din aceleaşi motive ca cele folosite mai sus, subspaţiul generat de $\{E_2, E_3\}$ este un complement algebric al lui V_3.

Ex.11 d). În spaţiul V_4 avem baza $\{ e_1 = (1, 0, 1, 1), e_2 = (0, 1, 1, 1) \}$ care poate fi completată cu vectorii E_3, E_4 (vectorii bazei canonice din R^4) la o bază în $\mathbf{R}^4$. Deci subspaţiul generat de $\{E_3, E_4\}$ este un complement algebric al lui V_3.

Raţionând ca mai sus se poate stabili că un subspaţiu algebric complementar al subspaţiului $V_1 \subset \mathbf{R}^4$ de la Exerciţiul 12 este generat de familia $\{E_3, E_4\}$ iar pentru subspaţiul V_2 de la acelaşi exerciţiu putem considera subspaţiul generat de familia $\{E_1, E_4\}$.

14. Să se verifice dacă suma perechilor de spaţii vectoriale de mai jos este directă şi în caz afirmativ să se calculeze spaţiul sumă.

a) $V_1 = \{x \in \mathbf{R}^5, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0, x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_5 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbf{R}^5$.

b) $V_1 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, 2x_1 - x_3 = 0\}$ şi $V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$.

R: Pentru a vedea dacă suma este directă este suficient să calculăm $V_1 \cap V_2$ şi să aplicăm Teorema 1.7.2. a) Se observă că $V_2 = \{x \in \mathbf{R}^5, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_5 = 0\}$

astfel că $V_1 \cap V_2$ este mulțimea vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ din $\mathbf{R}^5$ ale căror coordonate satisfac sistemul

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - x_5 = 0,\ x_5 = 0.$$

Acest sistem este compatibil nedeterminat, admițând și soluții diferite de soluția nulă. Deci $V_1 \cap V_2 \neq (0)$ și suma nu este directă.

b) Ca și în cazul punctului a), $V_1 \cap V_2$ este mulțimea vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ din $\mathbf{R}^4$ ale căror coordonate satisfac sistemul

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,\quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 2x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_4 = 0.$$

Acest sistem este compatibil determinat și admite doar soluția nulă. Atunci $V_1 \cap V_2 = (0)$ și suma este directă. Deoarece dimensiunile subspațiilor V_1 și respectiv V_2 sunt egale cu 2, deducem aplicând teorema lui Grassmann că $\dim_{\mathbf{R}} V_1 \oplus V_2 = 4$. Deci $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$.

15. Să se arate că suma subspațiilor generate de familiile $G_1 = \{e_1 = (2, 3, 1, 5), e_2 = (1, 1, 5, 2), e_2 = (3, 4, 6, 7)\}$ și $G_2 = \{f_1 = (0, 0, 0, 1), f_2 = (1, 2, 3, 1)\}$ este directă și egală cu întreg spațiul. Să se determine descompunerea vectorului $x = (2, 2, 3, 7)$ în sumă de doi vectori, unul din $\overline{G}_1$ și altul din $\overline{G}_2$.

R: Se demonstrează că $\dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 = \dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 = 2$. Deoarece $G_1 \cup G_2$ este sistem de generatori pentru $\overline{G}_1 + \overline{G}_2$ în care avem sistemul liniar independent $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$, maximal (cu cel mai mare număr de vectori) putem spune că $B = \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ este o bază pentru $\overline{G}_1 + \overline{G}_2$. Deci $\dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 + \overline{G}_2 = 4$. Folosind teorema lui Grassmann deducem că $\dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = 0$, deci $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = (0)$ și suma este directă. Mai mult $\overline{G}_1 + \overline{G}_2$ are dimensiunea egală cu 4 și rezultă că $\overline{G}_1 + \overline{G}_2 = \mathbf{R}^4$.

Vectorul x are coordonatele (1, 1, 1, -1) în baza B și $x = e_1 + e_2 + f_1 - f_2$. Atunci luăm $x_1 = e_1 + e_2 = (3, 4, 6, 7)$ și $x_2 = f_1 - f_2 = (-1, -2, -3, 0)$ și $x = x_1 + x_2$ este descompunerea căutată.

CAPITOLUL 2

VECTORI LIBERI

2.1 Segment orientat. Vector liber.

Acest capitol este dedicat în totalitate studierii unui spaţiu vectorial real particular, anume spaţiului vectorilor liberi. Acest spaţiu vectorial este deosebit de util în aboradarea unor probleme variate de geometrie, fizică şi nu numai. Pentru început, vom defini o serie de noţiuni şi operaţii care vor conduce în final la construcţia spaţiului vectorial al vectorilor liberi.

Fie E_3 spaţiul geometriei elementare. Elementele acestui spaţiu se numesc puncte.

Definiţia 2.1.1 *Numim segment orientat orice pereche ordonată (A, B) ∈ E_3 x E_3. Vom folosi notaţia $\vec{AB}$ pentru acest segment, a cărui reprezentare grafică este dată în Fig. 1.*

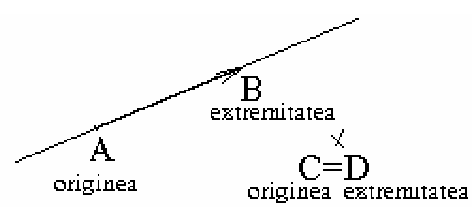


Fig. 1

Punctul A se va numi *originea* segmentului orientat iar B *vârful* sau *extremitatea*. Dacă punctele A şi B sunt diferite, atunci acestea determină în mod unic o dreaptă numită *dreapta suport* a segmentului orientat.

Dacă C = D atunci convenim să numim segmentul orientat (C, D) $\stackrel{not}{=} \overrightarrow{CC} \stackrel{not}{=} \overrightarrow{0}$ *segment orientat nul*. Este evident că un segment orientat nul nu determină în mod unic o dreaptă. Deci, în cazul segmentul orientat nul $\overrightarrow{CC}$, putem spune că orice dreaptă care trece prin punctul C este o dreaptă suport a acestuia.

Definiția 2.1.2 *Două segmente orientate nenule au aceeaşi direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid. Orice două segmente orientate nule au aceeaşi direcție.*

Un segment orientat nenul determină pe dreapta sa suport un anumit sens, lucru ce permite introducerea noțiunii de *acelaşi sens* pentru două segmente orientate cu aceeaşi direcție.

Definiția 2.1.3 *a) Spunem că două segmente orientate nenule cu aceeaşi dreaptă suport, au acelaşi sens dacă sensurile determinate de ele pe dreapta suport coincid Fig. 2 a).*

b) Două segmente orientate nenule cu aceeaşi direcție, dar cu drepte suport diferite, au acelaşi sens dacă, în planul determinat de dreptele suport, extremitățile lor sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta care uneşte originile segmentelor Fig. 2 b).

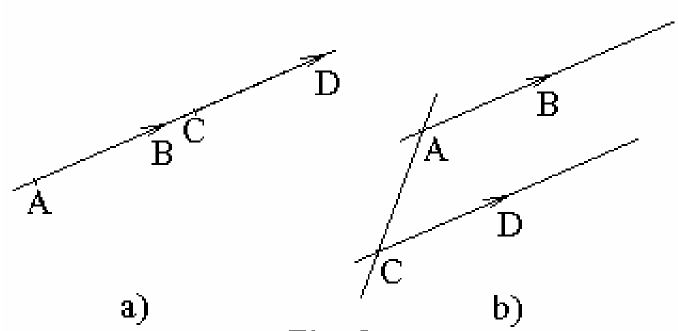


Fig. 2

Definiţia 2.1.4 *Se numeşte lungime (normă sau modul) a unui segment orientat* $\overrightarrow{AB}$*, distanţa de la punctul A la punctul B. Vom folosi notaţia* $\|\overrightarrow{AB}\|$ *pentru lungimea segmentului orientat* $\overrightarrow{AB}$.

Până acum am pus în evidenţă trei elemente caracteristice ale unui segment orientat nenul: direcţia, sensul şi lungimea. În mod evident, acestea nu determină în mod unic un segment orientat, dar împreună cu originea segmentului fac acest lucru. În cele ce urmează se va elimina acest neajuns prin definirea unor clase unic determinate de cele trei elemente, clase ce realizează "eliberarea de origine".

Fie M mulţimea tuturor segmentelor orientat nenule. Pe această mulţime definim relaţia binară ρ astfel,

$$\overrightarrow{AB}\,\rho\,\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ şi } \overrightarrow{CD} \text{ au aceeaşi direcţie,}$$
$$\text{acelaşi sens şi aceeaşi lungime}$$

Este uşor de verificat că această relaţie este o relaţie de echivalenţă, adică este *reflexivă, simetrică şi tranzitivă*. În continuare vom denumi această relaţie de echivalenţă, *relaţie de echipolenţă*.

Relaţia de echipolenţă poate fi prelungită şi la segmentele orientate nule astfel: oricare două segmente orientate nule sunt echipolente între ele. Noua relaţie, considerată pe mulţimea tuturor segmentelor orientate din spaţiu, este în continuare o relaţie de echivalenţă.

Definiția 2.1.5 *Clasele de echivalență[*)] ale segmentelor orientate, relativ la relația de echipolență, se numesc vectori liberi.*

Vectorii liberi se vor nota cu litere mici ale alfabetului latin, cu o bară deasupra : $\bar{a}, \bar{b}$.... . Vectorul liber care conține segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ va fi notat asemănător, adică $\overline{AB}$ ($\overline{AB}$ este mulțimea segmentelor orientate echipolente cu $\overrightarrow{AB}$).

Dacă $\overrightarrow{AB} \in \bar{a}$ atunci spunem că $\overrightarrow{AB}$ este un *reprezentant* al lui $\bar{a}$. Noțiunile de direcție, sens şi lungime introduse pentru un segment orientat, sunt extinse la clasa din care acesta face parte, reprezentând direcția, sensul şi lungimea comună tuturor elementelor din clasă. Pentru a desemna lungimea unui vector liber, vom folosi notațiile $\|\bar{a}\|$ sau $\left\|\overline{AB}\right\|$.

Vectorul liber de lungime 0 (clasa tuturor segmentelor orientate nule) se numeşte *vectorul nul* şi se notează $\bar{0}$. Vectorii liberi care au aceeaşi direcție se numesc *coliniari*, iar vectorii liberi care au reprezentanții paraleli cu acelaşi plan se numesc *coplanari*. Doi vectori liberi ai căror reprezentanți sunt echipolenți sunt *egali*.

Definiția 2.1.6 *Orice vector liber care are lungimea egală cu 1 se numeşte versor.*

Mulțimea vectorilor liberi va fi notată V_3. În secțiunea următoare vom defini o operație internă pe V_3 (adunarea vectorilor liberi) şi o operație externă, de înmulțire cu numere reale, împreună cu care V_3 va căpăta o structură de spațiu vectorial.

---

[*] O clasă de echivalență relativ la relația binară ρ, considerată pe o mulțime M este o submulțime C_1 a lui M care are proprietatea $x, y \in C_1 \Leftrightarrow x\rho y$.

2.2 Operaţii cu vectori liberi

I. Adunarea vectorilor liberi.

Definiţia 2.2.1 *Dacă* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *sunt doi vectori liberi şi* $\overrightarrow{OA}$, *respectiv* $\overrightarrow{AB}$ *sunt doi reprezentanţi ai acestora, atunci* $\bar{a} + \bar{b}$ *este vectorul liber* $\bar{c}$ *al cărui reprezentant este* $\overrightarrow{OB}$*, Fig. 3 a).*

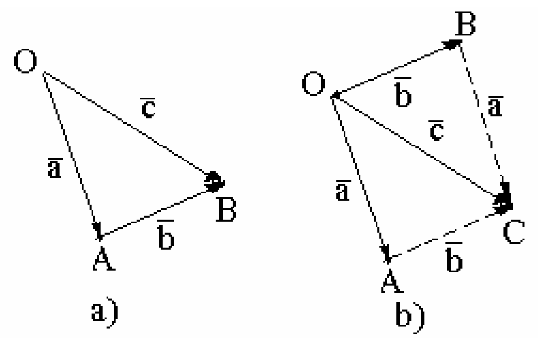


Fig. 3

Regula de adunarea a vectorilor liberi din definiţia de mai sus este cunoscută sub denumirea de *regula triunghiului.*

Nu este dificil de văzut că, dacă vom considera paralelogramul determinat de vectorii $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \bar{b}$, atunci (vezi Fig. 3 b)) vectorul $\overrightarrow{OC} \in \bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ este diagonala acestui paralelogram. Adunarea vectorilor liberi poate fi definită folosind şi această regulă numită *regula paralelogramului.* Cele două definiţii sunt echivalente (Exerciţiu).

Propoziţia 2.2.1 *(V_3, +) este grup comutativ.*

Demonstraţie. Din modul de definiţie al operaţiei de adunare a vectorilor liberi, rezultă că operaţia "+" este bine definită. *Asociativitatea:* Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in V_3$ şi $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{AB} \in \bar{b}$, $\overrightarrow{BC} \in \bar{c}$, este uşor de văzut, conform

definiției de mai sus, că vectorii liberi $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ şi $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ au un acelaşi reprezentant $\overrightarrow{OC}$ (Fig. 4 a) şi b)).

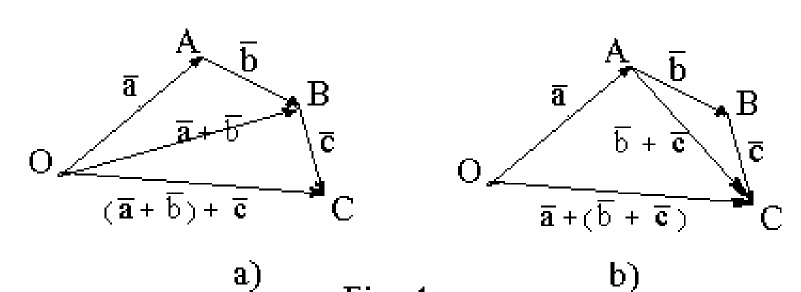
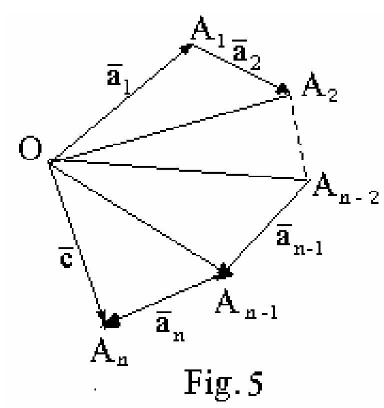


Fig. 4

Comutativitatea: rezultă dacă folosim regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor. *Elementul neutru* al grupului este vectorul nul $\bar{0}$ iar *simetricul* unui vector liber oarecare $\overline{AB} \in V_3$ este vectorul liber $\overline{BA}$.

Folosind proprietatea de asociativitate de mai sus, putem extinde uşor regula triunghiului la cazul a *n* vectori liberi.

Definiția 2.2.2 *Dacă* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ *sunt n vectori liberi şi* $\overrightarrow{OA_1} \in \bar{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2} \in \bar{a}_2$, …, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} \in \bar{a}_n$, *atunci suma vectorilor* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ *este vectorul liber* $\bar{c}$ *al cărui reprezentant este* $\overrightarrow{OA_n}$, *(fig. 5). Notăm* $\bar{c} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$.



Regula exprimată de definiția de mai sus este cunoscută sub denumirea de *regula poligonului strâmb* şi rezultă prin aplicarea

inductivă a regulii triunghiului, adică $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = \bar{a}_1 + (\bar{a}_2 + (\ldots(\bar{a}_{n-1} + \bar{a}_n)))$ şi a proprietății de asociativitate a operațieie de adunare a vectorilor liberi.

II. Înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale

Următoarea operație pe care o vom introduce este înmulțirea unui număr real α cu un vector liber oarecare $\bar{a}$.

Definiția 2.2.3 *Fie $\bar{a} \in V_3$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$. Atunci*

a) $\alpha\bar{a}$ este vectorul nul $\bar{0}$ dacă $\alpha = 0$ sau $\bar{a} = \bar{0}$;

b) $\alpha\bar{a}$ este un vector care are lungimea $\alpha\|\bar{a}\|$, aceeaşi direcție şi acelaşi sens cu vectorul $\bar{a}$ dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\alpha > 0$;

c) $\alpha\bar{a}$ este un vector care are lungimea $-\alpha\|\bar{a}\|$, aceeaşi direcție ca şi vectorul $\bar{a}$ şi sens opus acestuia dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\alpha < 0$.

Exercițiu: Înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale satisface axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 a spațiului vectorial.

Exercițiul de mai sus şi Propoziția 2.2.1 ne asigură că V_3 este într-adevăr un spațiu vectorial real.

2.3 Dependență liniară în V_3

Teorema 2.3.1 *a) Vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ sunt liniar dependenți dacă şi numai dacă sunt coliniari.*

b) Vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in V_3$ sunt liniar dependenți dacă şi numai dacă sunt coplanari.

Demonstrație. a) " $\Rightarrow$ " Dacă cel puțin unul din vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este nul, atunci funcționează convenția că vectorul nul are aceeaşi direcție cu orice vector şi rezultă concluzia. Dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\bar{b} \neq \bar{0}$, presupunem că există scalarii α, $\beta \in \mathbf{R}$ astfel încât $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \bar{0}$ şi $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Facem alegerea $\alpha \neq 0$ şi avem $\bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$, ceea ce înseamnă că $\bar{a}$ şi $\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$ au aceeaşi direcție, aceeaşi lungime şi sensuri opuse, conform Definiției 2.2.3. Deci $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari.

" $\Leftarrow$ " Dacă unul din vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ este nul, atunci afirmația este evidentă. Altfel, dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$ sunt coliniari, atunci versorii acestora $\bar{a}/\|\bar{a}\|$ şi respectiv $\bar{b}/\|\bar{b}\|$ sunt într-o relație de forma $\bar{a}/\|\bar{a}\| = \pm\bar{b}/\|\bar{b}\|$. De aici rezultă concluzia (exercițiu).

b) Ca şi în cazul a) situația în care cel puțin unul dintre vectori este nul este trivială pentru ambele implicații, deci presupunem mai departe că toți vectorii sunt nenuli. " $\Rightarrow$ " Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt liniar dependenți atunci există scalarii α, β, $\gamma \in$ R, nu toți nuli, astfel încât $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$. Fără a restrânge generalitate, presupunem că $\alpha \neq 0$. Avem $\bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\bar{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\bar{c}$, ceea ce, conform punctului a), este echivalent cu faptul că $\bar{a}$ este coliniar cu vectorul sumă a vectorilor $-\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$ şi $-\frac{\gamma}{\alpha}\bar{c}$, deci coplanar cu aceştia. Tot conform punctului a), vectorii $-\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$, respectiv $-\frac{\gamma}{\alpha}\bar{c}$ sunt coliniari cu vectorii $\bar{b}$, respectiv $\bar{c}$. Deci $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari.

" $\Leftarrow$ " Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari, atunci este uşor de văzut (Fig. 6) că $\bar{a}$ poate fi descompus ca sumă de doi vectori coliniari cu $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a} = \bar{b}_1 + \bar{c}_1$, unde $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$ au reprezentații $\overline{OB_1}$ şi respectiv $\overline{OC_1}$ ($AB_1 \,||\, OC$, $AC_1 \,||\, OB$, $B_1 \in OB$, $C_1 \in OC$).

Folosind din nou punctul a) rezultă că există scalarii β_1 şi $\gamma_1 \in R$ astfel încât $\overline{b}_1 = \beta_1 \overline{b}$ şi respectiv $\overline{c}_1 = \gamma_1 \overline{c}$. De aici rezultă concluzia.

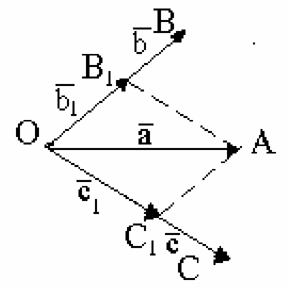


Fig. 6

Din teorema de mai sus rezultă că *oricare trei vectori necoplanari din V_3 sunt liniar independenţi.*

Teorema 2.3.2 *Dimensiunea spaţiului vectorial V_3 este egală cu 3.*

Demonstraţie. În primul rând observăm că există trei vectori necoplanari în V_3. Într-adevăr, oricare trei vectori liberi nenuli cu direcţiile două câte două perpendiculare, sunt necoplanari. Fie deci $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ trei vectori liberi necoplanari din V_3. Cei trei vectori sunt liniar independenţi, conform observaţiei de mai sus. Rămâne să arătăm că ei formează un sistem de generatori pentru V_3. Fie $\overline{d} \in V_3$ un vector oarecare şi $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$, $\overrightarrow{OC} \in \overline{c}$, $\overrightarrow{OD} \in \overline{d}$ reprezentanţii celor patru vectori Fig. 7. Dacă D_1, D_2, D_3 sunt proiecţiile lui D pe dreptele suport ale segmentelor orientate $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$, atunci aplicăm regula paralelogramului şi teorema de mai sus şi deducem că

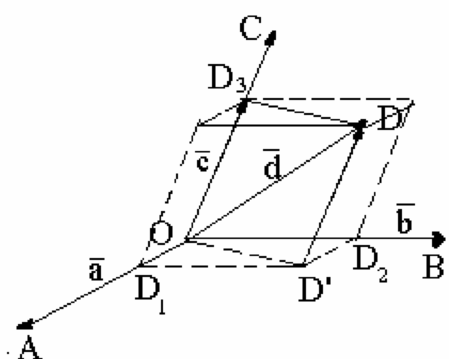


Fig. 7

$\overline{OD} = \overline{OD}_3 + \overline{OD'} = \overline{OD}_3 + \overline{OD}_1 + \overline{OD}_2 = \gamma\,\overline{OC} + \alpha\,\overline{OA} + \beta\,\overline{OB}$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Deci

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} \tag{2.3.1}$$

şi demonstraţia este încheiată.

Sistemul de scalari (α, β, γ) din formula (2.3.1) reprezintă coordonatele vectorului $\bar{d}$ în baza $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ a spaţiului V_3.

Observaţia 2.3.1 a) Dacă $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sunt trei versori din V_3 care au proprietatea că dreptele suport ale reprezentanţilor sunt perpendiculare două câte două, atunci aceştia sunt necoplanari (Fig. 8). Deci formează o bază în V_3, pe care o numim *bază canonică*. Coordonatele unui vector liber într-o bază canonică se numesc *coordonate euclidiene*.

b) Fie $O \in E_3$ un punct fixat şi $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ o bază canonică în V_3.

O *axă* este o dreaptă pe care s-a luat *o origine*, *o unitate de măsură* şi *un sens de parcurs*. Numărul real x asociat punctului M pe o axă se numeşte *coordonata punctului M* faţă de axa considerată. Atunci punctul O şi baza B (mai precis cei trei reprezentanţi cu originea O ai vectorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) definesc trei axe Ox, Oy şi Oz, perpendiculare două câte două (numite axe carteziene), având originea comună O şi aceeaşi unitate de măsură (vezi Fig. 8). (Unitatea de măsură este aleasă astfel încât extremităţile reprezentanţilor lui $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ cu originea în O să aibă coordonatele 1 în raport cu axele corespunzătoare). Aceste axe formează reperul cartezian Oxzy. Fie $D \in E_3$ un punct oarecare din spaţiu. Atunci vectorul $\bar{r} \in V_3$ care are reprezentantul $\overrightarrow{OD}$ se numeşte *vector de poziţie* al punctului D. În mod evident, *coordonatele euclidiene*

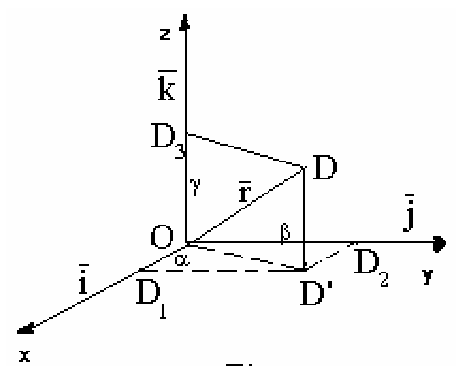


Fig. 8

α, β, γ ale vectorului $\bar{r}$ *coincid* cu *coordonatele carteziene* faţă de reperul Oxzy ale punctului D (vezi Capitolul 6).

Dacă $d \subset E_3$ este o dreaptă iar $\overrightarrow{AB}$ este un segment orientat, A, B $\in$ E_3, atunci intersecţia dreptei d cu planele $P_1 \ni A$ şi $P_2 \ni B$ ce sunt perpendiculare pe d este formată din două puncte A_1 şi respectiv B_1.

Segmentul orientat $\overrightarrow{A_1B_1}$ se numeşte *proiecţia ortogonală* a segmentului $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta d.

Exerciţiu: Proiecţiile pe aceeaşi dreaptă a două segmente orientate echipolente sunt echipolente.

Proiecţia ortogonală a unui vector liber $\bar{r}$ *pe o dreaptă* d, este vectorul liber ce are drept reprezentant proiecţia ortogonală pe dreapta d a oricărui reprezentant al lui $\bar{r}$.

Definiţia 2.3.1 *Fie* $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ *şi* $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \bar{b}$ *reprezentanţii acestora. Numărul real* $\varphi \in [0, \pi]$, *ce reprezintă unghiul format de dreptele OA şi OB, se numeşte unghiul dintre vectorii* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *(Fig. 9). Dacă* $\varphi = \pi/2$ *atunci vectorii* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *se numesc ortogonali.*

Prin convenţie, vectorul nul este ortogonal pe orice vector. Dacă $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ iar φ este unghiul dintre ei atunci numărul real $\cos\varphi \, \|\bar{a}\|$ se numeşte *mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale* a vectorului $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ şi se notează $pr_{\bar{b}}\bar{a}$ conform [6].

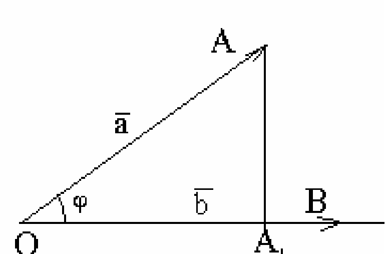


Fig. 9

Exerciţiu: [6] Mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale are următoarele proprietăţi

a) $pr_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = pr_{\bar{b}}\bar{a} + pr_{\bar{b}}\bar{c}$, oricare ar fi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in V_3$, nenuli.

b) $pr_{\bar{b}}\alpha(\bar{a}) = \alpha\ pr_{\bar{b}}\bar{a}$ oricare ar fi $\alpha \in R$.

2.4 Produsul scalar

Definiția 2.4.1 *Dacă $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ atunci produsul scalar al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, notat $<\bar{a}, \bar{b}>$ este egal cu*

a) 0 dacă $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$,

b) $\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \cos \varphi$, unde φ este unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$.

Exercițiu: Se observă că vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $<\bar{a}, \bar{b}> = 0$.

Teorema 2.4.1 *Produsul scalar al vectorilor liberi are următoarele proprietăți:*

1) $<\bar{a}, \bar{a}> \geq 0$, $\bar{a} \in V_3$ şi $<\bar{a}, \bar{a}> = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$;

2) $<\bar{a}, \bar{b}> = <\bar{b}, \bar{a}>$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$;

3) $\alpha<\bar{a}, \bar{b}> = <\alpha\bar{a}, \bar{b}>$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ (omogeneitate)

4) $<\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}> = <\bar{a}, \bar{c}> + <\bar{b}, \bar{c}>$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in V_3$, (distributivitate a produsului scalar față de adunarea vectorilor)

5) Fie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ o bază canonică în V_3 şi $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ doi vectori din V_3. Atunci

(2.4.1) $$<\bar{a}, \bar{b}> = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

În plus, dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ iar φ este unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, atunci

$$(2.4.2)\ \ cos\ \varphi = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}}$$

Demonstraţie. 1) şi 2) sunt evidente dacă ţinem cont de faptul că unghiul φ dintre $\bar{a}$ şi $\bar{a}$ este 0 iar unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ coincide cu unghiul dintre $\bar{b}$ şi $\bar{a}$. 3) Dacă $\alpha = 0$, demonstraţia este evidentă. Dacă $\alpha \neq 0$, atunci vectorii $\bar{a}$ şi $\alpha\ \bar{a}$ sunt coliniari şi au acelaşi sens în cazul $\alpha > 0$ şi sensuri opuse în caz contrar. Unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este egal cu cel dintre $\alpha\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă $\alpha > 0$ sau este suplementar celui dintre $\alpha\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă $\alpha < 0$.

Având în vedere relaţiile dintre unghiuri şi faptul că $\|\alpha\bar{a}\| = |\alpha|\|\bar{a}\|$, se deduce concluzia.

4) Folosind proprietăţile mărimii algebrice a proiecţiei ortogonale şi observând că $<\bar{a}, \bar{c}> = pr_{\bar{c}}\bar{a}\ \|\bar{c}\|$, avem succesiv

$<\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}> = pr_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})\ \|\bar{c}\| = (pr_{\bar{c}}\bar{a} + pr_{\bar{c}}\bar{b})\|\bar{c}\| = <\bar{a}, \bar{c}> + <\bar{b}, \bar{c}>$.

5) Deoarece $<\bar{i}, \bar{i}> = <\bar{j}, \bar{j}> = <\bar{k}, \bar{k}> = 1$ iar $<\bar{i}, \bar{j}> = <\bar{j}, \bar{k}> = <\bar{i}, \bar{k}> = 0$, aplicăm proprietăţile de 2) şi 3) ale produsului scalar şi obţinem (2.4.1). 6) Din definiţia produsului scalar şi conform relaţiei (2.4.1) avem că $\|\bar{a}\|^2 = <\bar{a}, \bar{a}> = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Aplicăm din nou (2.4.1) şi obţinem (2.4.2).

2.5 Produsul vectorial

Definiţia 2.5.1 *Dacă* $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$, *atunci produsul vectorial al vectorilor* $\bar{a}$, $\bar{b}$, *notat* $\bar{a} \times \bar{b}$ *este egal cu*

a) $\bar{0}$ *dacă* $\bar{a} = \bar{0}$ *sau* $\bar{b} = \bar{0}$ *sau dacă* $\bar{a}, \bar{b}$ *sunt coliniari;*

b) $\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin\varphi\, \bar{e}$, *dacă* $\bar{a}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ *sunt necoliniari, unde* φ *este unghiul dintre* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *şi* $\bar{e}$ *este un versor perpendicular pe* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *al cărui sens este determinat cu ajutorul regulii burghiului (adică rotind pe* $\bar{a}$ *peste* $\bar{b}$*, în sens direct, versorul* $\bar{e}$ *are sensul de înaintare a burghiului)(Fig. 10).*

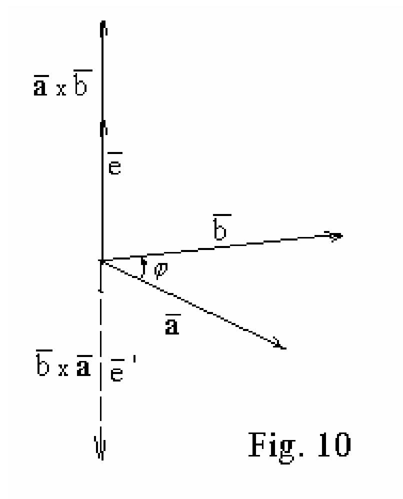


Fig. 10

Observația 2.5.1 Norma produsului vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ are următoarea interpretare geometrică: este aria paralelogramului determinat de reprezentanţii cu aceeaşi origine ai vectorilor liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Teorema 2.5.1 *Produsul vectorial are următoarele proprietăți:*

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ *(anticomutativitate);*

2) $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \alpha\bar{b}$, $\alpha \in \mathrm{R}$, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$;

3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ *(distributivitate);*

4) $\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = (\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|)^2 - <\bar{a}, \bar{b}>^2$ *(identitatea lui Lagrange);*

5) Dacă $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, *unde* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ *este o bază canonică în* V_3*, atunci*

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia 1) rezultă din definiţia produsului vectorial, datorită faptului că măsura unghiului $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ *) este egală cu cea a unghiului $\sphericalangle(\bar{b}, \bar{a})$ iar versorii $\bar{e}$ şi respectiv $\bar{e}'$ (corespunzători celor două produse vectoriale), obţinuţi conform regulii burghiului (Fig.10), au sensuri opuse.

2) Dacă $\alpha > 0$, atunci $\sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \sphericalangle(\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$. Deci $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha\ \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \|\alpha\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b}$. Analog se arată că $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times \alpha\bar{b}$. În cazul $\alpha = 0$ se obţin vectorilor liberi nuli în fiecare membru al egalităţii şi rezultă concluzia. Dacă $\alpha < 0$, avem $\sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \sphericalangle(\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \pi - \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ şi deducem că $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha\ \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = -\alpha\ \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin(\pi - \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})) = \|\alpha\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b}$ etc.

3) Cazul în care vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ sunt coliniari, este un exerciţiu simplu pentru cititor. Presupunem că $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ nu sunt coliniari. Vom demonstra mai întâi că dacă $\bar{b}'$ este proiecţia ortogonală a vectorului $\bar{b}$ pe o dreaptă D perpendiculară pe $\bar{a}$, inclusă într-un plan paralel cu vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, atunci $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}'$. Versorii vectorilor $\bar{a} \times \bar{b}$ şi $\bar{a} \times \bar{b}'$ fiind perpendiculari pe acelaşi plan, sunt coliniari şi, deoarece $\|\bar{a} \times \bar{b}'\| =$

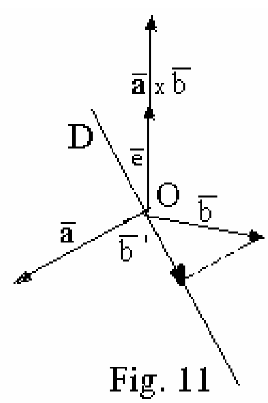


Fig. 11

$\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}'\|\sin\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}') = \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|\cos\sphericalangle(\bar{b},\bar{b}')\sin\pi/2 = \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|\cos(\pi/2 - \sphericalangle(\bar{a},\bar{b})) = \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|\sin\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) = \|\bar{a}x\bar{b}\|$, rezultă concluzia. Fie acum $\bar{c}'$ proiecția ortogonală a vectorului $\bar{c}$ pe dreapta $D_1 \ni O$, perpendiculară pe $\bar{a}$, inclusă într-un plan paralel cu vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{c}$. Din cele arătate mai sus rezultă că $\bar{a}\,x\,\bar{c} = \bar{a}\,x\,\bar{c}'$. Este clar că dreapta suport a lui $\bar{a}$, D şi D_1 sunt ortogonale două câte două. Deoarece vectorii $\bar{b}'$ şi $\bar{c}'$ sunt de fapt "proiecțiile ortogonale" [*)] ale vectorilor liberi $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ pe planul determinat de D şi D_1 este uşor de văzut că $\bar{b}' + \bar{c}'$ este egal cu proiecția ortogonală pe acest plan, notată $\bar{d}'$, a vectorului $\bar{b} + \bar{c}$. Este uşor de văzut că $\bar{d}' = \bar{b}' + \bar{c}'$. Astfel, $\bar{a}\,x\,\bar{b} + \bar{a}\,x\,\bar{c} = \bar{a}\,x\,\bar{b}' + \bar{a}\,x\,\bar{c}' = \bar{a}\,x(\bar{b}' + \bar{c}') = \bar{a}\,x\,\bar{d}' = \bar{a}\,x(\bar{b} + \bar{c})$ şi rezultă concluzia.

Punctul 4) al teoremei îl lăsăm ca exercițiu, căci se obține aplicând definițiile produsului scalar şi respectiv vectorial. Pentru a demonstra 5) observăm că $\bar{i}\,x\,\bar{i} = \bar{j}\,x\,\bar{j} = \bar{k}\,x\,\bar{k} = 0$ şi $\bar{i}\,x\,\bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j}\,x\,\bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k}\,x\,\bar{i} = \bar{j}$. Se efectuează calculele şi se obține concluzia.

2.6 Produsul mixt al vectorilor. Dublul produs vectorial

Definiția 2.6.1 *Fie $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in V_3$. Produsul scalar al vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}\,x\,\bar{c}$, notat $<\bar{a}, \bar{b}\,x\,\bar{c}>$, se numeşte produs mixt al vectorilor $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.*

Dacă vectorii $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt are următoarea interpretare geometrică: este volumul

[*] Folosim notația $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$ pentru unghiul dintre vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

[*] Proiecția ortogonală a unui vector liber $\bar{a}$ pe un plan este acel vector liber ce are drept reprezentant proiecția ortogonală pe planul respectiv a unui reprezentant al vectorului $\bar{a}$.

paralelipipedului construit pe suporturile reprezentanților vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ care au originea comună (Fig. 12). Într-adevăr, se cunoaşte deja că modulul vectorului $\bar{b} x \bar{c}$ reprezintă aria *A* a paralelogramului ce reprezintă baza paralelipipedului din Fig. 12. Deoarece $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} x \bar{c})$ este egal cu unghiul φ dintre înălțimea h a paralelipipedului din figură şi vectorul $\bar{a}$, deducem că $\left| \|\bar{a}\| \cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}) \right| = h$.

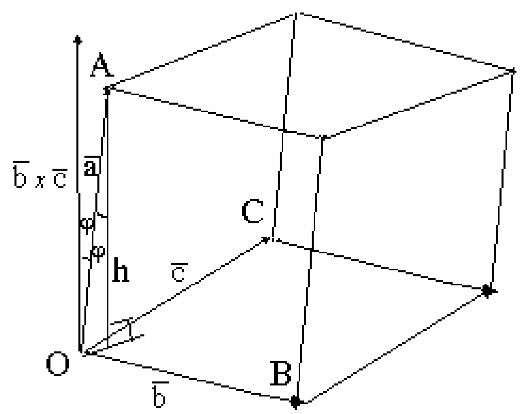


Fig. 12

Atunci $\left|\langle \bar{a}, \bar{b} x \bar{c} \rangle\right| = \left| \|\bar{a}\| \|\bar{b} x \bar{c}\| \cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}) \right| = A$ h şi rezultă concluzia.

Teorema 2.6.1 *Produsul mixt are următoarele proprietăți:*

1) Dacă $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, $\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$, *unde* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ *este o bază canonică în* V_3, *atunci*

$$(2.6.1) \quad <\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) $<\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = 0 \Leftrightarrow$ *unul din vectori este nul sau doi dintre vectori sunt coliniari sau vectorii sunt coplanari.*

3) $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = <\bar{b}, \bar{a} \times \bar{c}> = <\bar{c}, \bar{b} \times \bar{a}>$, $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = -<\bar{a}, \bar{c} \times \bar{b}>$.

4) $<\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b} \times \bar{c}> = <\bar{a}_1, \bar{b} \times \bar{c}> + <\bar{a}_2, \bar{b} \times \bar{c}>$.

Demonstrație. Afirmația 1) este o consecință a proprietății 5) a produsului scalar şi respectiv vectorial.

2) " $\Leftarrow$ ". Dacă unul din vectori este nul, afirmația rezultă imediat. Dacă doi vectori sunt coliniari, de exemplu $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, atunci există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $\bar{a} = \alpha \bar{b}$. Deci $a_i = \alpha b_i$, i = 1, 2, 3 şi, folosind proprietățile determinanților şi punctul a), rezultă $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = 0$. Analog se tratează cazul în care alți doi vectori sunt coliniari.

Dacă cei trei vectori sunt coplanari, atunci vectorul $\bar{b} \times \bar{c}$ este perpendicular pe planul celor trei vectori, deci pe $\bar{a}$. Conform definiției produsului scalar, deducem că $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = 0$.

" $\Rightarrow$ ". Dacă $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = 0$, aplicăm proprietatea 2) de mai sus şi deducem că determinantul din relația (2.6.1) este nul. Deci vectorii din R^3 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) sunt liniar dependenți. Deoarece componentele acestor vectori sunt de fapt coordonatele vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ în baza $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, atunci putem spune că $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt liniar dependenți. Aplicând Teorema 2.3.1 b), obținem concluzia.

3) Se foloseşte proprietatea 1) a produsului mixt şi proprietățile determinanților. Afirmația de la punctul 4) rezultă din proprietatea de aditivitate a produsului scalar.

Definiția 2.6.2 *Numim produs dublul vectorial al vectorilor* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$ *vectorul* $\bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

Teorema 2.6.2 *Vectorul* $\overline{d}$ *definit mai sus are următoarele proprietăţi*

a) este coplanar cu vectorii $\overline{b}$ *şi* $\overline{c}$.

b) $\overline{d} = <\overline{a} \times \overline{c}> \overline{b} - <\overline{a}, \overline{b}> \overline{c}$.

Demonstraţie. a) Vectorul $\overline{d}$, fiind produsul vectorial al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b} \times \overline{c}$, va fi perpendicular pe aceştia, deci $\overline{d} \perp \overline{b} \times \overline{c}$. Deoarece vectorul $\overline{b} \times \overline{c}$ este perpendicular pe $\overline{b}$ şi $\overline{c}$, deducem că $\overline{d}$ este coplanar cu $\overline{b}$ şi $\overline{c}$. Dacă $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}, \overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$, $\overline{c} = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}$ unde $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ este o bază canonică în V_3, atunci, conform Teoremei 2.5.1, avem $\overline{b} \times \overline{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\overline{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\overline{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\overline{k}$ şi

$\overline{d} = [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)]\overline{i} + [a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)]$
$\overline{j} + [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)]\overline{k}$. Rearanjând termenii obţinem

$$\overline{d} = (a_2c_2 + a_3c_3)\, b_1\overline{i} + (a_3c_3 + a_1c_1)b_2\overline{j} + (a_2c_2 + a_1c_1)b_3\overline{k} +$$

$$- (a_2 b_2 + a_3 b_3)\, c_1\overline{i} - (a_3b_3 + a_1b_1)]\, c_2\overline{j} - (a_1 b_1 + a_2b_2)]\, c_3\overline{k}.$$

De aici rezultă că $\overline{d} = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}) = <\overline{a}, \overline{c}>\overline{b} - <\overline{a}, \overline{b}>\overline{c}$.

Exerciţiul 2.6.1 *Să se arate că dacă* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in V_3$, *atunci*

$$<\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d}> = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{d} \rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{d} \rangle \end{vmatrix}.$$

R: Aplicăm Teorema 2.6.2 şi obţinem $<\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d}> = <\overline{d}, (\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}>$ $> = <\overline{d}, -\overline{a} <\overline{b}, \overline{c}> + \overline{b}<\overline{a}, \overline{c}>> = -<\overline{d}, \overline{a}><\overline{b}, \overline{c}> + <\overline{a}, \overline{c}><\overline{d}, \overline{b}> = <\overline{a}, \overline{c}><\overline{b}, \overline{d}> - <\overline{a}, \overline{d}><\overline{b}, \overline{c}>$. *Rezultă concluzia.*

2.7 Exerciții

1. Să se discute şi să se rezolve sistemul $\begin{cases} \lambda\bar{x} + \mu\bar{y} = \bar{a} \\ \mu\bar{x} + \lambda\bar{y} = \bar{b} \end{cases}$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$, λ, $\mu \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

R: Înmulțind prima ecuație cu $-\mu$ şi pe a doua cu λ şi adunându-le obținem ecuația $0\bar{x} + (\lambda^2 - \mu^2)\bar{y} = -\mu\bar{a} + \lambda\bar{b}$. Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} \lambda\bar{x} + \mu\bar{y} = \bar{a} \\ (\lambda^2 - \mu^2)\bar{y} = -\mu\bar{a} + \lambda\bar{b} \end{cases}, \ \bar{a},\ \bar{b} \in V_3,\ \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$

a) Dacă $(\lambda^2 - \mu^2) \neq 0$, adică $\lambda \neq \pm\mu$ atunci sistemul are soluția unică

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}\bar{a} - \frac{\mu}{\lambda^2 - \mu^2}\bar{b},\ \bar{y} = -\frac{\mu}{\lambda^2 - \mu^2}\bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}\bar{b}.$$

b) Dacă $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, atunci fie $-\mu\bar{a} + \lambda\bar{b} \neq \bar{0}$, caz în care sistemul este incompatibil, fie $-\mu\bar{a} + \lambda\bar{b} = \bar{0}$, caz în care orice pereche de vectori $\bar{x} = \frac{1}{\lambda}(\bar{a} - \mu\bar{y})$, $\bar{y} \in V_3$ este soluție a sistemului.

2. Să se arate că pentru ca trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să închidă un triunghi este necesar şi suficient ca $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$.

R: Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ închid un triunghi, adică au reprezentanții $\overrightarrow{BC} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{CA} \in \bar{b}$, $\overrightarrow{AB} \in \bar{c}$ (Fig. 13), atunci se aplică Definiția 2.2.1 şi rezultă concluzia. Reciproc, dacă $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ atunci $\bar{c} = -(\bar{a} + \bar{b})$. Dacă $\overrightarrow{BC} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{CA} \in \bar{b}$ atunci $\overrightarrow{BA} \in \bar{a} + \bar{b}$, deci $\overrightarrow{AB} \in \bar{c}$ şi demonstrația este completă.

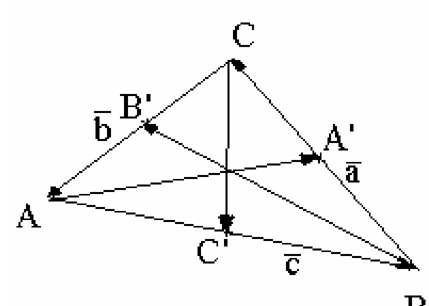


Fig. 13

3. Fie $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ trei vectori care închid un triunghi. Să se exprime cu ajutorul lor vectorii care au ca reprezentanţi medianele triunghiului şi să se arate că aceştia pot închide la rândul lor un triunghi.

R: Fie ABC triunghiul închis de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ şi fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB (vezi Fig. 13). Atunci $\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{BA'} = \overline{AB} + 1/2\ \overline{BC} \in \overline{c} + 1/2\,\overline{a}$. Analog se arată că $\overline{BB'} \in \overline{a} + 1/2\,\overline{b}$, respectiv $\overline{CC'} \in \overline{b} + 1/2\,\overline{c}$. Folosind rezultatul de la exerciţiul precedent, avem $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{0}$ şi rezultă că vectorii liberi $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ pot închide un triunghi.

4. Fie AB şi CD două coarde perpendiculare în cercul de centru O şi fie M punctul lor de intersecţie. Să se arate că $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{\mathbf{MC}} + \overline{MD} = 2\ \overline{\mathbf{MO}}$.

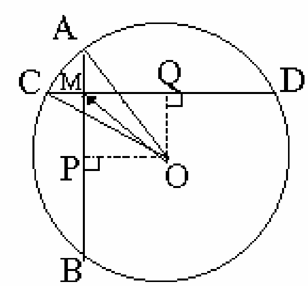


Fig. 14

R: Notăm cu P şi respectiv Q mijloacele coardelor AB şi CD (fig. 14). Atunci patrulaterul OQMP este dreptunghi şi $\overline{OM} = \overline{OQ} + \overline{OP}$. Ţinând cont de faptul că $\overline{OQ} = 1/2\ (\overline{OC} + \overline{OD})$ şi $\overline{OP} = 1/2\ (\overline{OA} + \overline{OB})$ obţinem $2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$.

Pe de altă parte avem $\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$ şi relaţiile analoge pentru $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ şi $\overline{MD}$. Deci $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO} + 2\overline{OM} = 2\overline{MO}$.

5. Fie ABCD un patrulater convex. Se notează cu O_1, O_2 mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Să se arate că ABCD este paralelogram dacă şi numai dacă există $k \in \mathbf{R} - \{1/2\}$ astfel încât $\overline{\mathbf{O_1O_2}} = k(\overline{AD} - \overline{\mathbf{BC}})$.

R: Avem $\overline{O_1O_2} = 1/2\,(\overline{O_1B} + \overline{O_1D}) = 1/2\,(\overline{O_1C} + \overline{CB} + \overline{O_1A} + \overline{AD}) = 1/2\,(\overline{AD} - \overline{BC})$. Deci există $k \in \mathbf{R} - \{1/2\}$ astfel încât $\overline{O_1O_2} = k(\overline{AD} - \overline{BC}) \Leftrightarrow \overline{O_1O_2} = \overline{0} \Leftrightarrow O_1 = O_2$.

6. Fie ABCD şi $A_1B_1C_1D_1$ două paralelograme oarecare în spaţiu. Se consideră punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care împart segmentele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 în acelaşi raport. Să se arate că $A_2B_2C_2D_2$ este un paralelogram (Fig. 15).

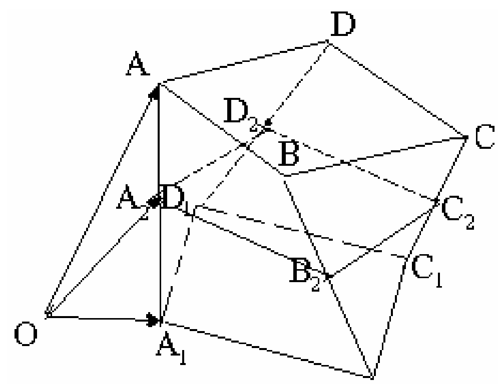


Fig. 15

R: Fie O un punct al spaţiului. O condiţie necesară şi suficientă ca ABCD şi $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralelograme este ca diagonalele lor să se înjumătăţească, adică între vectorii de poziţie ai vârfurilor să existe relaţiile:

(2.7.1) $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$

(2.7.2) $\overline{OA}_1 + \overline{OC}_1 = \overline{OB}_1 + \overline{OD}_1$.

Deoarece A_2 are proprietatea $\overline{AA_2} = k\,\overline{A_2A_1}$, rezultă $\overline{OA}_2 = \overline{OA} + \overline{AA_2} = \overline{OA} + k\,\overline{A_2A_1} = \overline{OA} + k(\overline{OA}_1 - \overline{OA}_2)$. Deci $\overline{OA}_2 = \dfrac{1}{k+1}(\overline{OA} + k\,\overline{OA}_1)$. Analog se obţin relaţiile pentru $\overline{OB}_2$, $\overline{OC}_2$, $\overline{OD}_2$ (adică relaţia de mai sus în care înlocuim pe A cu B, C şi D). Folosind aceste relaţii şi ţinând cont de (2.7.1) şi (2.7.2) rezultă $\overline{OA}_2 + \overline{OB}_2 = \overline{OC}_2 + \overline{OD}_2$, lucru echivalent cu faptul că $A_2B_2C_2D_2$ este un paralelogram.

7. Fie triunghiul ABC şi A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor BC, CA, AB.

   a) Să se arate că pentru orice punct M al spaţiului avem

$$\overline{\mathbf{OA}} + \overline{\mathbf{OB}} + \overline{\mathbf{OC}} = 3\overline{\mathbf{OA}} + 2\,\overline{AA}_1 = 3\overline{\mathbf{OB}} + 2\,\overline{BB}_1 =$$
$$3\overline{\mathbf{OC}} + 2\,\overline{CC}_1.$$

b) Să se arate că există un punct G şi numai unul (centrul de greutate al triunghiului) cu proprietatea $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$.

c) Să se arate că orice punct O al spaţiului satisface relaţia

$$\overline{\mathbf{OA}} + \overline{\mathbf{OB}} + \overline{\mathbf{OC}} = 3\overline{OG} \tag{2.7.3}$$

R: a) Avem $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{AC} = 3\overline{OA} + 2\overline{AA}_1 + \overline{A_1B} + \overline{A_1C} = 3\overline{OA} + 2\overline{AA}_1$, căci $\overline{A_1B} + \overline{A_1C} = \overline{0}$. Analog se arată celelalte relaţii. b) Conform punctului a), $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0} \Leftrightarrow 3\overline{GA} + 2\overline{AA}_1 = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{GA} = 2/3\overline{A_1A}$, adică G se află pe AA_1 la 2/3 de vârful A, $\Leftrightarrow$ G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

d) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OG} + \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = 3\overline{OG}$.

Observaţia 2.7.1 Fixând un punct O al spaţiului, putem defini centrul de greutate G al unui triunghi ca fiind un punct care are proprietatea (2.7.3) . Din exerciţiul de mai sus rezultă că G este corect definit.

În general pentru un poligon $A_1A_2\ldots A_n$ definim centrul de greutate ca fiind acel punct care satisface relaţia

$$\overline{OG} = \frac{1}{n}(\overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \ldots + \overline{OA}_n).$$

Dacă vom considera O' alt punct al spaţiului atunci $n\overline{O'G} = n\overline{O'O} + n\overline{OG} = (\overline{O'O} + \overline{OA}_1 + \overline{O'O} + \overline{OA}_2 + \ldots + \overline{O'O} + \overline{OA}_n)$, de unde deducem că $\overline{O'G} = \frac{1}{n}(\overline{O'A}_1 + \overline{O'A}_2 + \ldots + \overline{O'A}_n)$. Deci punctul G astfel definit nu depinde de alegerea punctului O din spaţiu.

8. Fie două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ (Fig. 16) cu centrele de greutate G şi G_1. Să se arate că $\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1 = 3\overline{GG}_1$ şi, cu ajutorul

acestei relații, să se formuleze o condiție necesară şi suficientă ca două triunghiuri să aibă acelaşi centru de greutate.

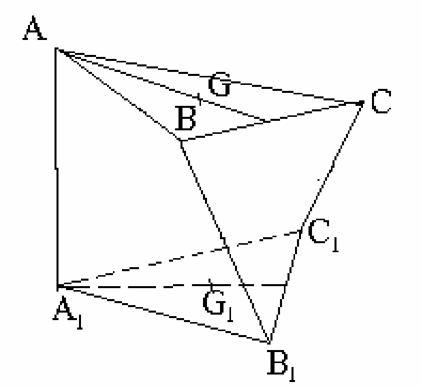


Fig. 16

R: Se observă că $\overline{AA}_1 = \overline{AG} + \overline{GG}_1 + \overline{G_1A_1}$. Scriind şi relațiile analoge pentru $\overline{BB}_1$ şi $\overline{CC}_1$ şi adunându-le, obținem $\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1 = 3\overline{GG}_1 - (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + \overline{G_1A_1} + \overline{G_1B_1} + \overline{G_1C_1} = 3\overline{GG}_1$. Pentru a obține ultima egalitate am aplicat punctul b) al exercițiului precedent. Deci, condiția necesară şi suficientă ca G = G_1 este $\overline{GG}_1 = \overline{0}$ sau, conform celor arătate mai sus,

$$\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1 = \overline{0}.$$

9. Se numeşte cerc Euler al coardei A_1A_2 a cercului S de rază R, cercul de rază R/2, al cărui centru este mijlocul coardei. Cele trei cercuri Euler ale laturilor unui triunghi $A_1A_2A_3$ înscris în cercul S se intersectează într-un punct O care constituie centrul cercului de rază R/2, ce trece prin centrele celor trei cercuri Euler. Acest ultim cerc se numeşte cercul lui Euler al triunghiului $A_1A_2A_3$. Să se arate că următoarea definiție este coerentă:

   Presupunem că am definit cercul Euler de rază R pentru un poligon cu *n* laturi înscris în cercul S de rază R. Să considerăm acum poligonul cu *n + 1* laturi $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ înscris în cercul S. În acest caz, cele *n+1* cercuri Euler ale poligoanelor cu *n* laturi $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, …, $A_1A_2\ldots A_n$ se intersectează într-un singur punct care constituie centru cercului de rază R/2, ce trece prin centrele tuturor celor *n + 1*

cercuri Euler; acest cerc se numeşte cercul Euler al poligonului cu $n + 1$ laturi $A_1A_2\ldots A_{n+1}$.

R: Fie O centrul cercului S. Demonstrăm prin inducţie după n că pentru un poligon $A_1A_2\ldots A_n$, punctul O' care satisface relaţia $\overline{OO'} = \dfrac{\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\ldots+\overline{OA_n}}{2}$ este centrul cercului Euler al poligonului $A_1A_2\ldots A_n$. Pentru $n = 2$, afirmaţia este adevărată. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru orice poligon cu n laturi şi o vom demonstra pentru un poligon cu $n + 1$ laturi. Fie $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ un poligon cu $n + 1$ laturi, O' punctul cu proprietatea că $\overline{OO'} = \dfrac{\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\ldots+\overline{OA_{n+1}}}{2}$ şi $O_1',\ldots,O_{n+1}'$ centrele cercurilor Euler ale poligoanelor $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, …, $A_1A_2\ldots A_n$. Avem

$$\overline{OO_1'} = \frac{\overline{OA_2}+\overline{OA_3}+\ldots+\overline{OA_{n+1}}}{2} = \overline{OO'} - \frac{\overline{OA_1}}{2},$$

$$\overline{OO_2'} = \frac{\overline{OA_1}+\overline{OA_3}+\ldots+\overline{OA_{n+1}}}{2} = \overline{OO'} - \frac{\overline{OA_2}}{2},$$

$$\ldots,$$

$$\overline{OO_{n+1}'} = \frac{\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\ldots+\overline{OA_n}}{2} = \overline{OO'} - \frac{\overline{OA_{n+1}}}{2}.$$

Deoarece $\overline{O_i'O'} = \overline{OO'} - \overline{OO_i'} = \dfrac{\overline{OA_i}}{2}$, $i = 1,\ldots, n+1$ rezultă că $\left\|\overline{O_i'O'}\right\| = \left\|\dfrac{\overline{OA_i}}{2}\right\| = \dfrac{R}{2}$ pentru toţi $i = 1,\ldots, n+1$. Deci O' aparţine cercurilor de centre O_i' şi rază $\dfrac{R}{2}$, $i = 1,\ldots, n+1$, adică cercurilor Euler ale poligoanelor $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, …, $A_1A_2\ldots A_n$. De asemenea, cercul cu centrul în O' şi rază $\dfrac{R}{2}$ trece prin centrele celor $n + 1$ cercuri Euler şi de aici rezultă şi unicitatea punctului O'.

10. Se consideră în spaţiu punctele A(1, -1, 1), B(2, 1, -1), C(3, 1, 2), D(8/3, 1, 1), E(4,-1, 1) faţă de reperul cartezian ortogonal Oxyz .

Să se verifice dacă punctele A, B, C, D şi respectiv A, B, C, E sunt coplanare şi, în caz afirmativ, să se stabilească dacă acestea sunt vârfurile unor patrulatere convexe .

R: Considerăm baza canonică *) $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ în V_3 astfel încât coordonatele carteziene şi cele euclidiene ale unui punct din E_3 să coincidă. Avem $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ şi $\overline{AB}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$. Procedând asemănător obţinem $\overline{BC}=\bar{i}+0\bar{j}+3\bar{k}$, $\overline{CD}=-1/3\bar{i}+0\bar{j}-\bar{k}$, $\overline{CE}=\bar{i}-2\bar{j}-1\bar{k}$. Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CD}$ (respectiv $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CE}$) sunt coplanari dacă şi numai dacă punctele A, B, C, D (respectiv A, B, C, E) sunt coplanare .

Deoarece $<\overline{AB},\ \overline{BC}\times\overline{CD}> = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1/3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, deducem, conform Teoremei 2.6.1, că vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CD}$ sunt coplanari, deci punctele A, B, C, D sunt în acelaşi plan. Calculând produsul mixt al vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ obţinem $<\overline{AB},\ \overline{BC}\times\overline{CE}> = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Aplicând din nou Teorema 2.6.1, rezultă că A, B, C, E nu sunt coplanare.

Astfel, pentru a răspunde la cea de a doua întrebare, este suficient să stabilim dacă ABCD este patrulater convex. Fie M(x, y, z) punctul de intersecţie al dreptelor AC şi BD. Avem $M\in AC \Leftrightarrow \overline{AC}\times\overline{AM}=0$ în timp ce $M\in BD \Leftrightarrow \overline{BD}\times\overline{BM}=0$. Ştiind că $\overline{AC}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ şi $\overline{BD}=2/3\,\bar{i}+2\bar{k}$ iar $\overline{AM}=(x-1)\bar{i}+(y+1)\bar{j}+(z-1)\bar{k}$, $\overline{BM}=(x-2)\bar{i}+(y-1)\bar{j}+(z+1)\bar{k}$, aplicăm Teorema 2.5.1 şi deducem

* Vom spune că $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ este baza canonică din V_3 corespunzătoare reperului cartezian ortogonal Oxyz.

că M∈ AC ⇔ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ şi M∈BD ⇔ $\frac{x-2}{2/3}=\frac{z+1}{2}$, y = 1.

Soluţia sistemului format din cele două ecuaţii de mai sus reprezintă coordonatele punctului M. Rezolvând sistemul obţinem x = 3, y = 1 şi z = 2. Deci M are coordonatele (3, 1, 2) şi M coincide cu C. Rezultă că ABCD nu este un patrulater convex.

11. Să se calculeze ariile *a* şi a_1 ale triunghiurilor ABC şi ABE unde A, B, C, E sunt punctele din E_3 considerate în exerciţiul precedent.

R: Fie *A* aria paralelogramului care este determinat de reprezentanţi ai vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$ cu aceeaşi origine. Ţinând cont de interpretarea geometrică a produsului vectorial a doi vectori, deducem că $A = \left\|\overline{AB}\times\overline{BC}\right\| = \left\|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}\right\| = \sqrt{65}$. Atunci aria triunghiului ABC este $a = \frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{65}}{2}$. Procedând în acelaşi fel se obţine aria $a_1 = \sqrt{18}$.

12. Fie Oxyz un reper cartezian şi A(0, -5, 0), B(1,-2, 3) două puncte din E_3. Se cere:

a) Să se determine un vector $\bar{v}$ paralel cu planul determinat de $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ astfel încât $\|\bar{v}\| = \|\overline{AB}\|$ şi $\bar{v}\perp\overline{AB}$.

b) Să se determine un versor $\bar{u}$ perpendicular şi pe $\bar{v}$ şi pe $\overline{AB}$.

R. Fie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ baza canonică în V_3 definită ca în Exerciţiul 11. Avem $\overline{AB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$. Fie $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Condiţia de egalitate a normelor se mai scrie $x^2 + y^2 = 19$ iar condiţia de ortogonalitate este echivalentă cu $<\bar{v}, \overline{AB}> = 0$, adică x + 3 y = 0. Din cele două condiţii rezultă $\bar{v} = \pm(-3\sqrt{\frac{19}{10}}\,\bar{i} + \sqrt{\frac{19}{10}}\,\bar{j})$.

b) $\bar{u} = \pm\frac{\bar{v}x\overline{AB}}{\|\bar{v}x\overline{AB}\|} = \pm(\frac{3}{\sqrt{145}}\bar{i} + \frac{9}{\sqrt{145}}\bar{j} - \frac{10}{\sqrt{145}}\bar{k})$.

13. Se consideră vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}$ şi $\bar{b} = -2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$. Să se determine:

a) unghiul dintre cei doi vectori;

b) proiecția vectorului $\bar{a}$ pe direcția lui $\bar{b}$;

c) înălțimea paralelogramului construit pe suporturile vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, corespunzătoare bazei $\bar{b}$.

R: a) Deoarece $\cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\langle\bar{a},\bar{b}\rangle}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$, obținem $\cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{-8}{\sqrt{77}}$.

c) $pr_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\langle\bar{a},\bar{b}\rangle}{\|\bar{b}\|^2}\bar{b} = \frac{-8}{7}(-2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k})$. c) $h = \frac{\|\bar{a}x\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{14}}$.

14. Se dau punctele A(1, -2, 3), B(2, -1, 8) în reperul cartezian ortogonal Oxyz.

a) Să se determine mulțimea punctelor C din planul xOy care au proprietatea că triunghiul ABC este isoscel, $\|AB\| = \|AC\|$ şi $<\overline{AB}, \overline{AC}> =$ - 9.

b) Să se calculeze aria triunghiului obținut la punctul precedent.

c) Se dă punctul D(2, -3, 4). Să se verifice dacă ABCD este un tetraedru şi în caz afirmativ să se calculeze volumul acestui tetraedru.

R: Fie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ baza canonică din V_3 corespunzătoare reperului cartezian Oxyz. a) Fie C(x, y, 0) $\in E_3$. Deoarece $\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$ şi $\overline{AC} = (x - 1)\bar{i} + (y + 2)\bar{j} - 3\bar{k}$

obţinem, conform Observaţiei 2.4.1, $\|AB\| = \sqrt{27}$, $\|AC\| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+9}$. Cele două condiţii de mai sus devin $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$, $x + y = 5$. Sistemul format din ultimele două ecuaţii are soluţia unică x = 4, y = 1. Deci punctul C căutat are coordonatele (4, 1, 0). b) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\| = 18\sqrt{2}$. d) Condiţia necesară şi suficientă ca ABCD să fie un tetraedru este ca vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi $\overline{AD}$ să fie necoplanari. Deoarece $<\overline{AB}, \overline{AC}\times\overline{AD}> = -36 \neq 0$, deducem că vectorii de mai sus sunt necoplanari şi ABCD este un tetraedru. $V_{ABCD} = |<\overline{AB}, \overline{AC}\times\overline{AD}>|/6=6$.

15. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{u} = 3\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$, $\overline{v} = \overline{b} + 2\overline{c}$, $\overline{w} = 3\overline{b} - \overline{c}$, unde vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in V_3$ au proprietatea că $\|\overline{a}\| = 2$, $\|\overline{b}\| = 4$, $\|\overline{c}\| = 3$, $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}\times\overline{c}) = \pi/4$, $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = \pi/6$.

R: $V = \left\|\langle\overline{u},\overline{v}x\overline{w}\rangle\right\| = 21\left\|\langle\overline{a},\overline{c}x\overline{b}\rangle\right\| = 21\|\overline{a}\|\,\|\overline{c}x\overline{b}\|\sqrt{2}/2 = 126\sqrt{2}$.

17. Să se calculeze $\overline{a}\times\overline{c}$, $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$ şi $<\overline{b},\overline{a}\times\overline{c}>$ pentru fiecare din cazurile de mai jos:

a) $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i}$;

b) $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{j} + \overline{k}$;

c) $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - 3\overline{j}$;

d) $\overline{a} = 4\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 5\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$;

e) $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$.

Indicaţie: Se aplică proprietăţile 1) (Teorema 2.6.1) şi 5 (Teoremele 2.5.1 şi 2.4.1) ale produselor mixt, vectorial şi respectiv scalar ale vectorilor liberi.

18. Să se determine unghiul $\varphi \in [0, \pi/2]$ format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ ştiind că vectorul $\bar{a} + 2\bar{b}$ este perpendicular pe vectorul $2\bar{a} - \bar{b}$ iar vectorul $\bar{a} + 3\bar{b}$ este perpendicular pe $4\bar{a} - 2\bar{b}$.

R: Avem $<\bar{a} + 2\bar{b}, 2\bar{a} - \bar{b}> = 0$ şi $<\bar{a} + 3\bar{b}, 4\bar{a} - 2\bar{b}> = 0$ sau echivalent $2\|\bar{a}\|^2 - 2\|\bar{b}\|^2 + 3<\bar{a}, \bar{b}> = 0$ şi respectiv $4\|\bar{a}\|^2 - 6\|\bar{b}\|^2 + 10<\bar{a}, \bar{b}> = 0$. Notând $\|\bar{a}\|^2 = x \geq 0$, $\|\bar{b}\|^2 = y \geq 0$, $<\bar{a}, \bar{b}> = z$ şi ţinând cont de relaţiile de mai sus obţinem un sistem compatibil cu soluţia unică $z = \alpha$, $y = 2\alpha$, $x = 1/2\alpha$. Deoarece $(\cos \varphi)^2 = y^2/xy$, avem $\varphi = 0$.

21. Dacă $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$ atunci numărul

$$G(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{c}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul Gram* al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Să se demonstreze că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul lor Gram este nul.

Indicaţie : Se demonstrează că $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}>^2 = G(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

CAPITOLUL 3

OPERATORI LINIARI

3.1 Definiţia operatorului liniar

Definiţia 3.1.1 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un corp comutativ K. O funcţie A: V $\rightarrow$ W se numeşte operator liniar (sau transformare liniară, sau morfism de spaţii vectoriale) dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

1. *$A(x + y) = A(x) + A(y)$ pentru orice $x, y \in V$;*
2. *$A(\alpha x) = \alpha A(x)$ pentru orice $\alpha \in K$ şi orice $x \in V$.*

În cazul în care V = W, operatorul liniar A : V $\rightarrow$ V se nume-şte endomorfism. Mulţimea operatorilor liniari definiţi pe V cu valori în W se notează $L_K(V, W)$(sau L(V, W) când corpul K se subînţelege). Dacă V = W vom scrie $L_K(V)$(respectiv L(V)) în loc de L(V,W) (respectiv L(V,W)).

Observaţia 3.1.1 a) Restricţia unui operator $A \in L_K(V, W)$ la un subspaţiu vectorial V_1 al domeniului său de definiţie este tot un operator liniar, notat $A|\, V_1$; b) A(0) = 0; c) A(-x) = - A(x).

Afirmaţiile de la punctele b) şi c) se rezultă direct din definiţia de mai sus. De exemplu, pentru a demonstra b), luăm α=0 în relaţia $A(\alpha\ x)$

= α A(x) şi obținem A(0) = 0 A(x) = 0, adică ceea ce trebuia demonstrat. Observând că A(0) = A(x + (-x))=A(x) + A(-x), aplicăm b) şi obținem c).

Observația 3.1.2 Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. O funcție A: V $\to$ W este operator liniar dacă şi numai dacă pentru orice x, y $\in$ V şi orice α, $\beta \in$ K este îndeplinită condiția

$$(*) \qquad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Într-adevăr, dacă A: V $\to$ W este operator liniar, atunci aplicăm definiția şi avem A(αx + βy) = A(αx) + A(βy) = αA(x) + βA(y), pentru orice x, y $\in$ V şi orice α, $\beta \in$ K.

Reciproc, presupunem că pentru orice x, y $\in$ V şi orice α, $\beta \in$ K are loc (*). Luând $\alpha = \beta = 1$ în (*), obținem A(x + y) = A(x) + A(y). Pe de altă parte, dacă facem $\beta = 0$ în (*), avem A(αx) = αA(x). Deci, cele două condiții din definiția transformării liniare sunt îndeplinite.

Exemplu 3.1.1 *Considerăm spațiile vectoriale* $\mathbf{R}^2$ *şi* $\mathbf{R}^3$ *peste corpul numerelor reale* ***R****. Verificați dacă aplicațiile definite mai jos sunt operatori liniari.*

a) $A : R^2 \to R^3$, $A(x) = (x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

b) $A : R^3 \to R^2$, $A(x) = (x_1 + x_3, x_2 x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$

Rezolvare. *a)Vom arata că A este un operator liniar. Într-adevăr, fie* α, $\beta \in \mathbf{R}$ *şi* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3$. *Atunci* $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$. *Folosind Observația 3.1.2, avem* $A(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_2 + \beta y_2)) = (\alpha(x_1 + 2x_2) + \beta(y_1 + 2y_2), \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - \beta y_2)) = (\alpha(x_1 + 2x_2), \alpha x_2, \alpha(x_1 - x_2)) + (\beta(y_1 + 2y_2), \beta y_2, \beta(y_1 - y_2)) = \alpha(x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2) + \beta(y_1 + 2y_2, y_2, y_1 - y_2) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

b) Deoarece, pentru $x = (1, 1, 1) \in \boldsymbol{R}^3$ şi $\alpha = 3 \in \boldsymbol{R}$ avem $A(\alpha x) = (6, 9) \neq 3(2,1) = \alpha A(x)$, rezultă că A nu este un operator liniar.

Exemplul 3.1.2. *Următoarele aplicaţii sunt operatori liniari (temă).*

a) $T: C^1(a, b) \to C^0(a,b)$, $T(f) = f'$, unde f' este derivata funcţiei f;

b) $T: C^0(a, b) \to \boldsymbol{R}$, $T(f) = \int_a^b f(x)dx$;

Un operator liniar $A \in L_K(V, W)$ bijectiv se numeşte *izomorfism de spaţii vectoriale* sau *operator liniar nesingular*. Dacă spaţiile V şi W coincid şi A este un izomorfism, atunci această A se numeşte *automorfism*. Dacă aplicaţia $A \in L_K(V, W)$ este doar injectivă, atunci A se numeşte *monomorfism* iar dacă este doar surjectivă, A se numeşte *epimorfism*. Acum putem introduce definiţia spaţiilor vectoriale izomorfe.

Definiţia 3.1.2. *Spunem că spaţiile vectoriale V şi W sunt izomorfe dacă există un izomorfism de spaţii vectoriale $\varphi \in L(V, W)$.*

Propoziţia 3.1.1 *Dacă V este un K- spaţiu vectorial de dimensiune finită n, atunci el este izomorf cu spaţiul K^n.*

Demonstraţie. Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază fixată în V şi $x \in V$ oarecare. Coordonatele lui x în baza B, $x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sunt unic determinate, conform Teoremei 1.2.2. Construim aplicaţia $\varphi : V \to K^n$ care asociază fiecărui vector x din V coordonatele sale în raport cu baza B, $\varphi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Este clar că aplicaţia astfel construită este bijectivă. Fie $y \in V$, $\beta \in K$. Dacă $y_B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, atunci coordonatele vectorului $\alpha x + \beta y$ în baza B sunt $(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)$. Ţinând cont de modul în care au fost introduse operaţiile spaţiului vectorial K^n (vezi Exemplul

1.1.2), se observă că $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$. Conform Observației 1.6.1, rezultă concluzia.

Observația 3.1.3. Din teorema de mai sus rezultă că două spații de dimensiune finită care sunt izomorfe au aceeaşi dimensiune.

3.2 Operații cu operatori liniari. Adunarea operatorilor. Înmulțirea operatorilor cu scalari

Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. Mulțimea $L_K(V, W)$ poate fi organizată ca un spațiu vectorial peste corpul K, aşa cum vom arăta în continuare. Fie A, B $\in L_K(V, W)$ şi fie $\alpha \in K$.

Prin definiție, suma operatorilor liniari A şi B (notată A + B) este funcția $C : V\to W$, $C(x) = A(x) + B(x)$, $x \in V$ iar produsul scalarului α cu operatorul liniar A (notat αA) este funcția $D: V\to W$, $D(x) = \alpha A(x)$, $x \in V$.

Propoziția 3.2.1 *Aplicațiile C şi D definite mai sus sunt operatori liniari.*

Demonstrație. Arătăm că C este operator liniar. Într-adevăr, $C(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y)$. Folosind proprietățile 1) şi 2) ale operatorilor liniari A şi B, obținem succesiv $C(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x) + A(\beta y) + B(\alpha x) + B(\beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y) = \alpha(A(x)+B(x)) + \beta(A(y)+B(y)) = \alpha C(x)+\beta C(y)$. Folosind Observația 3.1.2, rezultă că C este operator liniar. Analog se demonstrează că D este un operator liniar.

Propoziţia 3.2.1 demonstrează că operaţia de adunare a operatorilor este bine definită pe L_K (V, W) şi că produsul dintre un scalar şi un operator din L_K (V, W) este tot un operator din L_K (V, W).

Observaţia 3.2.1 *Mulţimea L_K (V, W) are o structură de K spaţiu vectorial împreună cu cele două operaţii definite mai sus.*

Acest lucru rezultă uşor dacă observăm că operaţia de adunare (suma operatorilor) este asociativă şi comutativă. Mai mult, există operatorul liniar O: $V \to W$, $O(x) = 0$, $x \in v$, (numit *operatorul liniar nul*) care are proprietatea că $O + A = A + O = A$ pentru orice $A \in L_K(V, W)$. De asemenea, pentru orice operator liniar $A \in L_K(V, W)$, se poate defini *operatorul liniar opus* "- A":

$$(- A)(x) = - A(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Este uşor de arătat că - A este o transformare liniară şi că

$$A + (-A) = (-A) + A = O.$$

În conluzie (L_K(V, W),+) este grup abelian. În plus, se poate arăta că operaţia de înmulţire a operatorilor cu scalari satisface cele patru axiome a) - d) din Definiţia 1.1.3. (temă - verificarea axiomelor) .

3.3 Rangul şi defectul unui operator liniar

Definiţia 3.2.1 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un corp comutativ K şi fie A: $V \to W$ un operator liniar. Mulţimea Ker A = $\{x \in V: A(x) = 0\}$ se numeşte nucleul lui A (sau spaţiul*

nul al lui A). Mulțimea $ImA = \{A(x) : x \in V\}$ *se numeşte imaginea operatorului liniar A.*

Propoziția 3.3.1 *Submulțimile Ker A şi ImA ale lui V şi respectiv W sunt subspații vectoriale ale lui V şi respectiv W.*

Demonstrație. Pentru demonstrație vom folosi Definiția 1.6.2. Se observă că pentru a demonstra că submulțimea *Ker A* este subspațiu vectorial al lui V trebuie să arătăm că $x + y \in KerA$ şi $\alpha x \in KerA$ oricare ar fi $x, y \in KerA$ şi $\alpha \in K$. Într-adevăr, dacă $x, y \in KerA$, atunci $A(x) = 0$, $A(y) = 0$, conform definiției lui *KerA*. Pe de altă parte, A este operator liniar şi $A(x + y) = A(x) + A(y) = 0 + 0 = 0$. Deci $x + y \in KerA$. De asemenea $A(\alpha x) = \alpha A(x) = 0$ şi $\alpha x \in KerA$. Rezultă concluzia.

Analog se arată că *ImA* este subspațiu vectorial al lui W. Fie $y_1, y_2 \in ImA$ şi $\alpha \in K$. Din definiția lui *ImA,* deducem că există $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $A(x_1) = y_1$, $A(x_2) = y_2$. Deci $y_1 + y_2 = A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2) \in ImA$. Aplicând din nou proprietățile operatorului liniar A, avem $\alpha y_1 = \alpha A(x_1) = A(\alpha x_1) \in ImA$. Deci $y_1 + y_2, \alpha y_1 \in ImA$, adică *ImA* este subspațiu vectorial al lui W.

Definiția 3.3.2 *Fie* $A \in L_K(V, W)$. *Dimensiunea subspațiului vectorial Ker A se numeşte defectul operatorului liniar A şi se notează d(A). Dimensiunea subspațiului vectorial Im A se numeşte rangul operatorului liniar A şi se notează r(A).*

Propoziția 3.3.2 *Fie* $A \in L_K(V, W)$. *Dacă V este finit dimensional, atunci ImA este finit dimensional. În plus*

$$r(A) + d(A) = dim_K V. \tag{3.3.1}$$

(Dimensiunea spaţiului V este egală cu suma dintre dimensiunea nucleului transformării liniare A şi dimensiunea imaginii lui A).

Demostraţie. Notăm $n = \dim_K V$. Fie $B_1 = \{e_1, e_2 \ldots, e_{d(A)}\}$ o bază în *KerA* pe care o completăm (a se vedea Teorema 1.3.3) la o bază $B_2 = \{e_1, e_2 \ldots, e_{d(A)}, e_{d(A)+1}, \ldots, e_n\}$ a lui V. Observăm că dacă d(A) = 0, atunci B_1 este mulţimea vidă. Vom arăta că $B_3 = \{A(e_{d(A)+1}), A(e_{d(A)+2}), \ldots, A(e_n)\}$ este o bază în *Im A*. De aici va rezulta imediat atât faptul că *ImA* este finit dimensional cât şi relaţia (3.3.1).

Din definiţia lui *Im A* deducem că, pentru orice $y \in Im\,A$, există $x \in V$ astfel încât $y = A(x)$. Deoarece B_2 este o bază în V, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{d(A)} \alpha_i e_i + \sum_{i=d(A)+1}^{n} \alpha_i e_i$. Atunci

$$y = A(x) = A\left(\sum_{i=1}^{d(A)} \alpha_i e_i\right) + A\left(\sum_{i=d(A)+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = A\left(\sum_{i=d(A)+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=d(A)+1}^{n} \alpha_i A(e_i).$$

Deci $B_3 = \{A(e_{d(A)+1}), A(e_{d(A)+2}), \ldots, A(e_n)\}$ este un sistem de generatori pentru *ImA*. Pentru a demonstra că B_3 este bază, rămâne să arătăm că B_3 este sistem liniar independent. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-d(A)}$ astfel încât

$$\alpha_1 A(e_{d(A)+1}) + \alpha_2 A(e_{d(A)+2}) + \ldots + \alpha_{n-d(A)} A(e_n) = 0.$$

Ţinând cont că A este o transformare liniară, rezultă

$$A(\alpha_1 e_{d(A)+1} + \alpha_2 e_{d(A)+2} + \ldots + \alpha_{n-d(A)} e_n) = 0.$$

sau, echivalent, $\alpha_1 e_{d(A)+1} + \alpha_2 e_{d(A)+2} + \ldots + \alpha_{n-d(A)} e_n \in Ker\,A$.

Cum B_1 este o bază în *Ker A*, rezultă că există scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{d(A)}$ astfel încât

$$\alpha_1 e_{d(A)+1} + \alpha_2 e_{d(A)+2} + \ \dots + \alpha_{n-d(A)} e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_{d(A)} e_{d(A)},$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 e_{d(A)+1} + \alpha_2 e_{d(A)+2} + \ \dots + \alpha_{n-d(A)} e_n - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \dots - \beta_{d(A)} e_{d(A)} = 0.$$

Pe de altă parte, $B_2=\{e_1, e_2 \dots, e_{d(A)}, e_{d(A)+1}, \dots, e_n\}$ este bază în V, deci, în particular, sistem liniar independent, de unde rezultă că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-d(A)} = \beta_1 = \dots = \beta_{d(A)} = 0.$$

În concluzie, B_3 este şi sistem liniar independent, deci bază pentru *ImA*.

Acum este clar că $r(A) = \dim_K(Im\ A) = card(B_3) = n - d(A)$,

sau echivalent, $r(A) + d(A) = n$. Demonstraţia este completă.

3.4 Produsul (compunerea) operatorilor

Fie U, V şi W trei spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ K. Dacă $A\in L_K(V, W)$ şi $B \in L_K(U, V)$, se defineşte *produsul* "AB" (notat şi $A\circ B$) prin

$$(AB)(x) = A(B(x)) \text{ pentru orice } x \in U.$$

Aplicaţia AB: $U \to W$ este o transformare liniară (temă).

Să considerăm acum cazul U = V = W. Aplicaţia $I_V : V \to V$, definită prin $I_V(x) = x$ pentru orice $x \in V$ este în mod evident un operator liniar şi se numeşte *operatorul liniar identic*.

Este clar că $I_V A = A I_V = A$, pentru orice $A \in L_K(V, V)$. Când spaţiul vectorial V se subînţelege, operatorul liniar identic se notează simplu I. Mulţimea $L_K(V, V)$, împreună cu produsul definit mai sus, are o structură de monoid (produsul operatorilor este o operaţie bine definită pe $L_K(V, V)$, asociativă şi cu element neutru). În concluzie $(L_K(V, V),+, \circ)$ este un inel necomutativ.

Pentru orice transformare liniară $A : V \to V$ şi orice orice număr natural $n \geq 2$ se poate defini *puterea* A^n :

$$A^n = AA^{n-1}, \text{ cu convenţia } A^1 = A.$$

Datorită asociativităţii produsului operatorilor liniari, sunt valabile următoarele reguli de compunere:

$$A^nA^m = A^{n+m},\ (A^n)^m = A^{nm}, \text{ oricare ar fi } n, m \in \mathbf{N}^*.$$

Pentru o transformare liniară nenulă A (diferită de transformarea liniară nulă O) se consideră prin convenţie că $A^0 = I$.

Următorul rezultat este o consecinţă directă a Propoziţiei 3.3.2.

Propoziţia 3.4.1 *Fie* n *un număr natural şi fie V şi W două spaţii vectoriale* n *- dimensionale peste un corp comutativ K. Pentru orice operator liniar A∈ L(V, W) următoarele afirmaţii sunt echivalente*

1) Ker A = $\{0_V\}$

2) Im A = W

3) Operatorul A este nesingular.

Înainte de a începe demonstraţia, observăm că proprietatea 1) (respectiv proprietatea 2)) a operatorului liniar A este echivalentă cu faptul că A este operator liniar injectiv (respectiv surjectiv). Într-adevăr, "A este operator liniar injectiv" $\Leftrightarrow$ "$A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$" $\Leftrightarrow$ " $A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$" $\Leftrightarrow$ " Ker A = $\{0_V\}$" iar "A este operator liniar surjectiv" $\Leftrightarrow$ "oricare ar fi $y\in W$, există $x\in A$ a.î. $A(x) = y$" $\Leftrightarrow$ " Im A = W ".

Demonstraţie. Presupunem 1). Atunci d(A) = 0 şi aplicând (3.3.1) deducem că $r(A) = \dim_K V = \dim_K W = n$. Deci *ImA* = W şi rezultă 2). Implicaţia inversă rezultă asemănător. Deducem că A este injectiv dacă şi numai dacă este surjectiv. Deci A este bijectiv şi echivalenţa dintre 3) şi 1) este evidentă.

Propoziția 3.4.2. *Fie $A \in L_K(V, W)$ un operator liniar nesingular. Atunci există un operator liniar $A^{-1} : W \to V$ astfel încât $AA^{-1} = I_W$ şi $A^{-1}A = I_V$.*

Demonstrație. Faptul că $A: V \to W$ este o aplicație bijectivă (vezi definiția operatorului nesingular) este echivalent cu faptul că A este o funcție inversabilă. Deci există o altă funcție $A^{-1}: W \to V$ a.î. $AA^{-1} = I_W$ şi $A^{-1}A = I_V$. Rămâne să arătăm că A^{-1} este un operator liniar.

Fie $y_1, y_2 \in W$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Deoarece A este surjectivă (fiind bijectivă) rezultă că există $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $y_1 = A(x_1)$ şi $y_2 = A(x_2)$. Atunci $A^{-1}(y_1) = A^{-1}(A(x_1)) = x_1$ şi $A^{-1}(y_2) = A^{-1}(A(x_2)) = x_2$. Avem $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}(\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)) = A^{-1}(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}(y_1) + \alpha_2 A^{-1}(y_2)$. Deci A^{-1} este o aplicație liniară.

Observația 3.4.1 Dacă $A \in L_K(V,W)$ este un operator liniar nesingular, atunci operatorul liniar A^{-1}, definit în propoziția de mai sus, se numeşte *inversul operatorului liniar A*. Se mai spune că A este un operator liniar inversabil.

Observația 3.4.2 a) Mulțimea operatorilor liniari nesingulari din $L_K(V)$ coincide cu mulțimea elementelor inversabile ale inelului $L_K(V)$, deci este un grup (în raport cu produsul operatorilor liniari).

b) Operatorii liniari nesingulari $A, B \in L_K(V)$ au următoarele proprietăți:

: AB este nesingular şi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

: A^{-1} este nesingular şi $(A^{-1})^{-1} = A$;

: dacă $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, atunci αA este nesingular şi $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$

Dacă A este nesingular, atunci putem defini A^{-n} pentru orice număr natural *n* prin formula $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Este uşor de văzut că $A^{-n} = (A^n)^{-1}$.

3.5 Matricea asociată unui operator liniar

În cele ce urmează vom considera doar spaţii vectoriale finit dimensionale. Fie V şi W două spaţii vectoriale finit dimensionale peste un corp comutativ K.

Definiţia 3.5.1. *Fie $A \in L_K(V, W)$. Dacă $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază a lui V şi $B_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ este o bază a lui W, atunci matricea $M_{B,B1} = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, cu elemente din corpul K, definită de relaţiile*

$$(3.5.1) \qquad A(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j \text{ pentru orice } 1 \le i \le n$$

se numeşte matrice asociată operatorului A în perechea de baze B şi B_1. În cazul în care $A \in L_K(V)$, se ia $B_1 = B$ şi matricea asociată operatorului A în baza B (notată M_B) va fi definită tot de relaţiile (3.5.1).

Observaţia 3.5.1. Matricea definită mai sus este unic determinată. Într-adevăr coordonatele $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \dots, \alpha_{im})$ ale vectorului $A(e_i)$, $i \in \{1,.., n\}$ în baza B_1 sunt unic determinate. În consecinţă, matricea $M_{B,B1} = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, ale cărei linii au drept elemente coordonatele $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im})$ corespunzătoare vectorilor $A(e_i)$ $(1 \le i \le n)$ în baza B_1, este unic determinată. Reciproc, matricea $M_{B,B1}$ şi relaţiile (3.5.1) definesc un unic operator liniar $A \in L_K(V, W)$. (Exerciţiu)

Exemplul 3.5.1 *Fie operatorul liniar $A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$, $A(x) = (x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ definit în Exemplul 3.1.1. Considerăm perechea*

de baze B = {e_1=(1,2), e_2=(2,2) } şi B_1 = {f_1=(2, 1,-1), f_2=(1, -1, 2), f_3=(-1, 2, 1) }. Matricea $M_{B,B1}$, asociată operatorului A în perechea de baze B, B_1, se obţine determinând coordonatele vectorilor u=A(e_1) = (5, 2, -1), v = A(e_2) = (6, 2, 0) în baza B_1.

Folosind lema substituţiei determinăm u_{B1}=(16/7, 4/7, 1/7), v_{B1}=(18/7, 8/7, 2/7) şi matricea de trecere este $M_{B,B1}=\begin{pmatrix} 16/7 & 4/7 & 1/7 \\ 18/7 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$.

Dacă pentru acelaşi operator liniar A considerăm perechea de baze B' = {E_1=(1,0), E_2=(0,1) }, B'$_1$ = {F_1=(1, 0, 0), F_2=(0, 1, 0), F_3=(0, 0, 1) } vom observa că matricea asociată se schimbă. Într-adevăr A(E_1) = (1, 0, 1), A(E_2) = (2, 1, -1) şi coordonatele lor în baza B'$_1$ vor coincide cu componentele lor. Deci $M_{B',B_1'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Este uşor de văzut că în acest caz* $A(x)^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}x^T$ *unde* $x^T=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Observaţia 3.5.2. Fie K un corp comutativ şi A : $K^n \to K^m$ o transformare liniară. Fie B_n, respectiv B_m, baza canonică din K^n, respectiv din K^m. (Reamintim că baza canonică în K^n este B_n = {E_1 = (1,0,..,0), E_2 = (0,1,0,...,0),..., E_n = (0,0,...,1)}, unde 1 este elementul neutru la operaţia de înmulţire din K). Coordonatele unui vector (x_1, x_2, …, x_m) din K^m în baza canonică sunt de fapt componentele vectorului respectiv: (x_1, x_2, …, x_m). Este uşor de văzut că liniile matricei $M=(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ asociate operatorului liniar A în raport cu perechea de baze B_n, B_m sunt date de coordonatele vectorilor A(E_1), A(E_2), …, A(E_n) în baza B_m. Dacă x = (x_1, x_2, .., x_n) este un vector din K^n, atunci $A(x)^T = M^T(x_1, x_2, .., x_n)^T$, unde indicele superior ^{T} desemnează transpoziţia.

Exerciţiu(generalizare a observaţiei de mai sus) *Fie $A \in L_K(V,W)$, $x \in V$ şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, respectiv $B_1 = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, baze în V, respectiv în W. Dacă $M_{B,B1}$ este matricea asociată lui A în perechea de baze B şi B_1, atunci $(A(x)_{B1})^T = M_{B,B1}{}^T x_B{}^T$, unde $A(x)_{B1}$ sunt coordonatele vectorului A(x) în baza B_1 iar x_B sunt coordonatele vectorului x în baza B.*

Indicaţie: Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ ($x_i \in K$ pentru orice $1 \le i \le n$) şi fie $\sum_{i=1}^{m} y_i f_i$ ($y_i \in K$ pentru orice $1 \le i \le m$) reprezentarea lui A(x) în baza $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Avem $A(x) = A(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \alpha_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ij} \right) f_j$. De aici rezultă concluzia.

I. Schimbarea matricei asociate unui operator liniar

Teorema 3.5.1 *Fie $A \in L_K(V, W)$ şi fie B, B' (respectiv B_1, B_1') două baze în V (respectiv în W). Dacă L este matricea de trecere de la baza B la baza B' şi M este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_1', atunci*

$$M_{B,B_1}(A) = L\, M_{B',B_1'}(A)\, M^{-1}$$

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B' = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ baze în V, $B_1 = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, $B_1' = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ baze în W şi $M_{B,B_1}(A) = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$, $M_{B',B_1'}(A) = (\beta_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ matricele asociate lui A în perechea de baze B, B_1, respectiv B', B_1'. Fie $L = (\lambda_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ matricea de

trecere de la baza B la baza B' şi $M = (\mu_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ matricea de trecere de la baza B_1 la baza $B_1^{'}$. Pentru orice $1 \le i \le n$, avem

(3.5.2) $A(g_i) = A(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e_j) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}A(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}f_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\alpha_{jk}\right)f_k$.

Pe de altă parte, pentru orice $1 \le i \le n$, avem

(3.5.3) $A(g_i) = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}h_j = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_{jk}f_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\mu_{jk}\right)f_k$.

Datorită unicităţii reprezentării unui vector într-o bază, din relaţiile (3.5.2) şi (3.5.3), rezultă că $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\alpha_{jk} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\mu_{jk}$ pentru orice $1 \le i \le n$ şi $1 \le k \le m$, adică $L M_{B,B_1}(A) = M_{B',B_1'}(A)M$. Înmulţind la stânga cu M^{-1}, obţinem $M_{B,B_1}(A) = L\ M_{B',B_1'}(A)\ M^{-1}$.

Corolarul 3.5.1. *Fie $A \in L_K(V)$. Dacă B şi B_1 sunt două baze în V şi C este matricea de trecere de la baza B la baza B_1, atunci*

$$M_{B_1}(u) = C\ M_B(u)\ C^{-1}$$

Demonstraţie. În Teorema 3.5.1 considerăm $B = B'$ şi $B_1 = B_1^{'}$ şi rezultă concluzia.

Observaţia 3.5.3. Reamintim aici că două matrice M şi N de ordinul *n*, cu elemente din corpul K, pentru care există o matrice inversabilă C astfel încât $M = CNC^{-1}$ se numesc *matrice asemenea.* Având în vedere corolarul de mai sus, deducem că matricele asociate aceluiaşi operator liniar $A \in L_K(V)$, în baze diferite sunt matrice asemenea.

3.6 Valori şi vectori proprii

Fie V un K-spaţiu vectorial n-dimensional şi $A \in L_K(V)$ un operator liniar.

Definiţia 3.6.1 *Un vector $x \in V$, $x \neq 0$ se numeşte vector propriu al operatorului A dacă există $\lambda \in K$ astfel încât*

(3.6.1) $$A(x) = \lambda x.$$

Scalarul $\lambda \in K$ se numeşte valoarea proprie a lui A corespunzătoare vectorului propriu x. Mulţimea valorilor proprii ale operatorului liniar A se numeşte spectrul operatorului A şi se notează cu $\sigma(A)$.

Propoziţia 3.6.1 *Mulţimea tuturor vectorilor proprii, corespunzători valorii proprii λ, la care se adaugă vectorul nul 0_V este un subspaţiu vectorial al lui V, notat V_λ. Acest subspaţiu se numeşte* subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii λ.*

Demonstraţie. Observăm că $A(0_V) = \lambda 0_V$. Deci $V_\lambda = \{x \in V, A(x) = \lambda x\}$. Fie $x, y \in V_\lambda$ şi $\alpha \in K$. Vom arăta că $x + y$, $\alpha x \in V_\lambda$. Într-adevăr, folosind proprietăţile operatorului liniar A, avem $A(x + y) = A(x) + A(y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y)$ şi $x + y \in V_\lambda$. Analog, $A(\alpha x) = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x = (\lambda\alpha)x = \lambda(\alpha x)$. Deci $\alpha x \in V_\lambda$.

Propoziţia 3.6.2. *Vectorii proprii ce corespund la valori proprii distincte sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie după n, $n \in \mathbf{N}^*$ că vectorii proprii $x_1, x_2, ..., x_n$, corespunzători valorilor proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt liniar independenţi. Dacă n = 1 şi $x_1 \neq 0$, atunci mulţimea $\{x_1\}$ este în mod evident liniar independentă. Presupunând proprietatea adevărată pentru n-1 vectori proprii, vom arăta că aceasta este adevărată şi pentru n. Dacă

$$(3.6.2) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

este o combinaţie liniară nulă formată cu vectorii proprii $x_1, x_2, ..., x_n$, atunci, folosind proprietăţile operatorului liniar A, obţinem succesiv $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = 0_V$, $\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) + ... + \alpha_n A(x_n) = 0$ şi $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + ... + \alpha_n \lambda_n x_n = 0$. Înmulţind relaţia (3.6.2) cu $-\lambda_n$ şi adunând-o cu relaţia de mai sus, obţinem $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + ... + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = 0$. Deoarece $\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru toţi $i \neq j$, $i, j \in \{1,..,n\}$ şi $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sunt liniar independenţi, conform ipotezei de inducţie, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0$. Folosind din nou relaţia (3.6.2), deducem că şi $\alpha_n = 0$. Deci $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt liniar independenţi.

Observaţia 3.6.1. Din propoziţia de mai sus rezultă imediat că subspaţiile proprii V_{λ_1}, V_{λ_2} corespunzătoare valorilor proprii distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ au în comun numai vectorul nul.(Exerciţiu).

Propoziţia 3.6.3 *Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sunt valori proprii distincte ale operatorului $A \in L_K(V)$ atunci suma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + ... + V_{\lambda_k}$ este directă.*

Demonstraţie. Fie $x \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + ... + V_{\lambda_k}$. Pentru ca suma să fie directă, trebuie să arătăm că x se scrie în mod unic ca o sumă de vectori din V_{λ_i}, i=1, .., k . Presupunem prin absurd că x admite două astfel de scrieri diferite. Deci există x_i, $y_i \in V_{\lambda_i}$, i=1, .., k şi o submulţime nevidă $I \subseteq \{1,\ldots, k\}$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$ şi $x_i \neq y_i$ pentru $i \in I$, $x_i = y_i$ pentru $i \in \{1,\ldots, k\} \setminus I$. De aici deducem că $\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i) = 0_V \Leftrightarrow$

$$\sum_{i \in I} (x_i - y_i) = 0_V \tag{3.6.3}$$

Observăm că pentru fiecare $i \in I$, $x_i - y_i$ este valoare proprie a lui V_{λ_i}. Aplicând Propoziţia 3.6.2, deducem că $\{ x_i - y_i , i \in I \}$ este sistem liniar independent, ceea ce contrazice relaţia (3.6.3). Deci scrierea lui x ca o sumă de vectori din V_{λ_i}, i = 1, .., k este unică şi, în consecinţă, suma subspaţiilor este directă.

Definiţia 3.6.2 *Fie $A \in M_n(K)$, K =* **R** *sau* **C**. *Matricea $X \in M_{nx1}(K)$, $X \neq 0$ se numeşte vector propriu al matricei A dacă $\exists \lambda \in K$ astfel încât $AX = \lambda X$. Scalarul $\lambda \in K$ se numeşte valoare proprie a matricei A.*

Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, $X = (x_i)_{i=1,n}$ şi I este matricea unitate de ordinul n cu elemente din K, atunci ecuaţia matriceală $AX = \lambda X$ poate fi scrisă sub forma $(A - \lambda I)X = 0$ sau, echivalent,

(3.6.3)
$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_2+(a_{12}-\lambda)x_2+...+a_{2n}x_n=0\\ \text{..}\\ a_{n1}x_1+a_{n1}x_2+...+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases}$$

Este bine cunoscut faptul că sistemul de ecuaţii liniare şi omogene de mai sus admite soluţii diferite de soluţia banală dacă şi numai dacă

(3.6.4) $$\mathrm{P}_{\mathcal{A}}(\lambda) = det(\mathcal{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\text{-}\lambda & ... & a_{2n}\\ \text{.........} & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix} = 0.$$

Polinomul P(λ) definit de relaţia de mai sus se numeşte **polinomul caracteristic** al matricei $\mathcal{A}$ iar ecuaţia P(λ) = 0 se numeşte **ecuaţia caracteristică** a matricei $\mathcal{A}$.

Propoziţia 3.6.4. Dacă matricele $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in M_n(K)$ sunt asemenea, atunci

$$\mathrm{P}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mathrm{P}_{\mathcal{A}}(\lambda).$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in M_n(K)$ două matrice asemenea. Conform Observaţiei 3.5.3, există o matrice $C \in M_n(K)$ inversabilă a. î. $\mathcal{B} = C^{-1}\mathcal{A}C$. Atunci $P_{\mathcal{B}}(\lambda) = \det(\mathcal{B} - \lambda I) = \det(C^{-1}\mathcal{A}C - \lambda I) = \det[C^{-1}(\mathcal{A} - \lambda I)C] = \det(C^{-1}) \det(\mathcal{A} - \lambda I) \det C = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = P_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

Din propoziţia de mai sus rezultă că polinomul caracteristic al matricei asociate unui operator liniar $A \in L_K(V)$ nu depinde de alegerea bazei spaţiului vectorial V, $\dim_K V = n$. În consecinţă putem introduce următoarea definiţie.

Definiţia 3.6.3 *Fie $A \in L_K(V)$, $\dim_K V = n$. Dacă B este o bază în V şi M este matricea asociată operatorului A în baza B, atunci numim*

polinom caracteristic al operatorului A, polinomul caracteristic al matricei M (notat acum $P_A(\lambda)$).

Având în vedere cele de mai sus, putem concluziona că λ este valoare proprie a operatorului liniar $A \in L_K(V)$ dacă şi numai dacă λ este o rădăcină a polinomului caracteristic $P_A(\lambda)$ sau, altfel spus, dacă λ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice a matricei M.

Definiţia 3.6.4 *Fie V un K-spaţiu vectoria a.î $\dim_K V = n$ şi $A \in L_K(V)$. Fie λ_0 o valoare proprie a operatorului liniar A. Dacă $P_A(\lambda)=(\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$, $m \in \mathbf{N}^*$ şi $Q(\lambda_0) \neq 0$, atunci m se numeşte multiplicitate algebrică a valorii proprii λ_0 şi se notează $m_a(\lambda_0)$. Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_0} corespunzător valorii proprii λ_0 se numeşte multiplicitate geometrică a valorii proprii λ_0 şi se notează $m_g(\lambda_0)$.*

Propoziţia 3.6.5 *În ipotezele din definiţai de mai sus, avem $m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$.*

Demonstraţie. Fie V_{λ_0} subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii λ_0 a operatorului liniar *A*. Fie $m = m_g(\lambda_0)$ şi $B_1=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ o bază a lui V_{λ_0} pe care o completam la o bază $B=\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ a lui V. Observăm că $A(e_1) = \lambda_0 e_1$, $A(e_2) = \lambda_0 e_2$, ..., $A(e_m) = \lambda_0 e_m$. Matricea asociată

operatorului A în baza B este de forma $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Acum este clar că polinomul caracteristic asociat lui A este $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$ şi $m \leq m_a(\lambda_0)$.

Teorema 3.6.1 (*Hamilton – Cayley*) *Dacă* $A \in M_n(K)$, $K =$ **R** *sau* **C** *şi* $P_A(\lambda)$ *este polinomul caracteristic al matricei* A, *atunci* $P_A(A) = 0$.

Demonstrație. Fie $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$, polinomul caracteristic al matricei A. Din definiția matricei reciproce, rezultă uşor că reciproca*) matricei $A - \lambda I$ este

$$(A - \lambda I)^* = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0, \qquad B_i \in M_n(K)$$

şi satisface relația $(A - \lambda I) \cdot (A - \lambda I)^* = \det(A - \lambda I)\, I$ sau, echivalent, $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = P_A(\lambda)\, I$. De aici obținem

*) Reamintim aici că pentru orice matrice $A \in M_n(K)$, matricea sa reciprocă (notată A^*) se obține prin înlocuirea elementelor matricei transpuse ${}^tA$ cu complemenții algebrici corespunzători. (Complementul algebric al elementului a_{ij} al matricei A este numărul $(-1)^{i+j}\gamma_{ij}$, unde γ_{ij} este minorul (determinantul) de ordinul n-1 al matricei A obținut prin tăierea liniei i şi coloanei j a matricei A). Este bine cunoscută relația $AA^* = (\det A)\, I$.

$(\mathcal{A} - \lambda I)\,(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + B_1\lambda + B_0) = (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)I.$

Identificând coeficienţii polinoamelor în λ, obţinem

$$a_0 I = -B_{n-1} \mid \circ \mathcal{A}^n$$

$$a_1 I = \mathcal{A} B_{n-1} - B_{n-2} \mid \circ \mathcal{A}^{n-1}$$

$$a_2 I = \mathcal{A} B_{n-2} - B_{n-3} \mid \circ \mathcal{A}^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1} I = \mathcal{A} B_1 - B_0 \mid \circ \mathcal{A}^1$$

$$a_n I = \mathcal{A} B_0 \mid \circ \mathcal{A}^0$$

Înmulţim pe rând relaţiile de mai sus cu $\mathcal{A}^n, \mathcal{A}^{n-1}, \mathcal{A}^{n-2}, \ldots A$ şi respectiv $A^0 = I$ şi adunându-le obţinem $a_0\mathcal{A}^n + a_1\mathcal{A}^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

3.7 Operatori liniari diagonalizabili

Considerăm spaţiul vectorial n-dimensional V definit peste corpul comutativ K. Fie $A \in L_K(V)$.

Definiţia 3.7.1 *Operatorul liniar A se numeşte diagonalizabil dacă există o bază* B = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *în spaţiul vectorial V astfel încât matricea corespunzătoare lui A în această bază să aibă forma diagonală.*

Propoziţia 3.7.1 *Operatorul liniar A* e*ste diagonalizabil dacă şi numai dacă există o bază a spaţiului vectorial V_n formată numai din vectori proprii ai operatorului A.*

Demonstraţie. Dacă A este diagonalizabil , atunci există o bază

$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ în raport cu care matricea asociată $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j = 1,n}$ are forma diagonală, adică $a_{ij} = 0$, pentru toţi $i \neq j$, $i,j = 1,.., n$. Deoarece $A(e_i) = a_{ii}e_i$, $i = 1,…, n$, deducem că e_i, $i = 1,.., n$ sunt vectori proprii pentru A .

Reciproc. Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază a lui V, formată numai din vectori proprii, atunci $A(v_i) = \lambda_i v_i$, pentru toţi $i = 1,.., n$ şi matricea asociată lui A în această bază este $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$. (Aici scalarii $\lambda_i \in K$ nu sunt neapărat distincţi.)

În condiţiile teoremei precedente, matricele asociate operatorului liniar A în diferite baze ale spaţiului vectorial V se numesc diagonalizabile.

Teorema 3.7.1. *Operatorul liniar $A \in L_K(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă polinomul său caracteristic are toate rădăcinile în corpul K şi dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu este egală cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii corespunzătoare.*

Demonstraţie. Dacă A este diagonalizabil, atunci există o bază $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$, formată numai din vectori proprii, în raport cu care matricea asociată are forma diagonală $D = \text{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$. Polinomul caracteristic al lui A este $P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - d_1)(\lambda - d_2)...(\lambda - d_n)$ şi este clar că ecuaţia caracteristică $P_A(\lambda) = 0$ are toate rădăcinile în corpul K. Deci toate valorile proprii ale lui A sunt în K. Trebuie să demonstrăm că multiplicităţile lor algebrice coincid cu cele geometrice. Descompus în factori primi, polinomul caracteristic $P_A(\lambda)$ se scrie sub forma $P_A(\lambda) = (-1)^n$

$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$, unde $m_i \in \mathbf{N}^*$, i = 1,..,p şi $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$. Evident λ_i i = 1,..,p sunt toate valoarile proprii distincte ale lui A, iar, pentru fiecare i = 1,..,p, m_i este multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_i. Fără a restrânge generalitatea, admitem că primii m_1 vectori din baza B = {e_1, e_2, ..., e_n} sunt vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ_1, următorii m_2 lui λ_2 etc. Rezultă că {e_1, e_2, ..., e_{m_1}} $\subset V_{\lambda_1}$ şi $m_1 = m_a(\lambda_1) \leq dim V_{\lambda_1} = m_g(\lambda_1)$. Aplicând Propoziţia 3.6.5, deducem că $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1)$. În mod asemănător se demonstrează faptul că multiplicităţile algebrice şi geometrice sunt egale şi pentru celelalte valori proprii.

Reciproc, presupunem că toate valorile proprii ale operatorului A sunt în K şi că dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu este egală cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii corespunzătoare. Fie $\lambda_i \in$ K, *i= 1,.., p,* toate valorile proprii (distincte) ale operatorului A, cu multiplicităţile algebrice m_i egale cu cele geometrice ($\sum_{1}^{p} m_i = n$, $dim V_{\lambda_i} = m_i$.). Considerăm mulţimea B = {e_{11}, e_{12}, ..., e_{1m_1}, e_{21}, e_{22}, ..., e_{2m_2}, ..., e_{p1}, ... e_{pm_p}}, convenind ca B_i = {e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im_i}} să formeze o bază în V_{λ_i}, *i=* 1,.., p. Arătăm că B este sistem liniar independent în V. Într-adevăr, fie $\alpha_{11} e_{11} + \alpha_{12} e_{12} +\ldots+ \alpha_{1m_1} e_{1m_1} + \alpha_{p1}e_{p1} + \ldots + \alpha_{pm_p} e_{pm_p} = 0_V$. Relaţia de mai sus se mai scrie $v_1 = 0\cdot v_1 + (-1)\cdot v_2 +\ldots+ (-1)\cdot v_p$, unde $v_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} e_{ij} \in V_{\lambda_i}$, *i=* 1,.., p. În mod evident $v_1 \in S = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} +\ldots+ V_{\lambda_p}$. Pe de altă parte, $v_1 = 1\cdot v_1 + 0_V + \ldots + 0_V$. Deoarece S este sumă directă, conform Propoziţiei 3.6.3 rezultă că scrierea lui v_1 ca o sumă

de vectori din V_{λ_i}, i= 1,.., p este unică, adică $v_1 = v_2 = \ldots = v_p = 0_V$. Deci $\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} e_{ij} = 0$, i= 1,.., p şi am obţinut combinaţii liniare nule formate cu vectorii bazelor B_i, i= 1,.., p. Rezultă că $\alpha_{ij} = 0$, pentru toţi j = 1,..,m_i, i= 1,.., p. Deci B este sistem liniar independent în V. Familia B este bază în V căci numărul de vectori din B este egal cu dimensiunea lui V. Matricea asociată operatorului liniar A în baz B este

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 & & & & & \\ . & . & . & . & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & . & & & & \\ & & & & & . & & & \\ & & & & & \lambda_p & 0 & \ldots & 0 \\ & & 0 & & & 0 & \lambda_p & \ldots & 0 \\ & & & & & 0 & . & \ldots & . \\ & & & & & 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{pmatrix},$$

adică este o matrice diagonală. Deci operatorul liniar A este diagonalizabil.

3.8 Exerciţii

1. Să se cerceteze care dintre aplicaţiile $A : V \to W$

a) $V = W = \mathbf{R}^2$, $A(x) = (x_1 + 2x_2, -x_1)$, unde $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

b) $V = W = \mathbf{R}^2$, $A(x) = (x_1^2 + x_2, -x_1)$, unde $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

c) $V = \mathbf{R}^2$, $W = \mathbf{R}^3$, $A(x) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + a, x_2)$, unde $x = (x_1, x_2)$ şi $a \in \mathbf{R}$.

d) $V = W = \{ f : [a, b] \to R : f \text{ continuă} \}$, $A(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ pentru orice $x \in [a, b]$.

e) $V = M_{n,n}(K)$, $W = K$, unde K este un corp comutativ, $A(C) = \text{trace}$

$$C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \text{ pentru orice matrice } C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}.$$

sunt operatori liniari.

R: Se verifică axiomele din definiţia operatorului liniar (Definiţia 3.1.1) sau condiţia (*) din Observaţia 3.1.2. Răspunsurile sunt: a) da, b) nu (pentru $x = (1, 0)$, $A(3x) = (9, -3) \neq 3(1,-1) = 3A(x)$), c) A este operator liniar dacă şi numai dacă $a = 0$ (dacă *A* este operator liniar, atunci $A(0, 0) = (0, 0, 0)$, deci $a = 0$; reciproc, dacă $a = 0$ se verifică cu definiţia că *A* este operator liniar) d) da, e) da.

2. Fie K un corp comutativ şi $A \in M_{n,n}(K)$ o matrice al cărei determinat este nul. Să se arate că există o matrice $B \in M_{n,n}(K)$ nenulă astfel încât $AB = O$ (matricea nulă).

R: Considerăm operatorul liniar $u: M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K)$, $u(X) = AX$ pentru orice matrice $X \in M_{n,n}(K)$. Presupunem prin absurd că oricare ar fi matricea nenulă $B \in M_{n,n}(K)$, $AB \neq O$. Presupunerea este echivalentă cu $\text{Ker } u = \{O\}$, adică cu *u* injectiv. Deoarece $M_{n,n}(K)$ este un spaţiu vectorial de dimensiune finită şi *u* este injectiv, rezultă că *u* este bijectiv (conform Propoziţiei 3.4.1). Operatorul liniar *u* fiind în particular surjectiv, rezultă că există o matrice X astfel încât $u(X) = I_n \iff AX = I_n$. Obţinem $0 = \det(A)\det(X) = \det(AX) = \det(I_n) = 1$, ceea ce contrazice ipoteza.

3. Să se determine nucleul şi imaginea, precum şi defectul şi rangul pentru următorii operatori liniari:

a) $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 - x_3)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$

b) $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 - x_3, x_3)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$

c) $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 - x_3, x_3+x_1)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$

d) $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_2)$, unde $x = (x_1, x_2)$

e) $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, - x_2 -x_1, 2x_1+2x_2)$, unde $x = (x_1, x_2)$

R: a) Ker u $=\{x: u(x) = (0, 0)\} =\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1+ x_2, x_2 - x_3) = (0, 0)\}$. Deci $x = (x_1, x_2, x_3) \in$ Ker u $\Leftrightarrow$ $x_2 - x_3$ este soluţie a sistemului $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat: luăm necunoscută secundară $x_3 = \alpha$, şi obţinem $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$. Deci Ker u $= \{(-\alpha, \alpha, \alpha): \alpha \in R\}$. O bază în Ker u este dată de $B_1 = \{(-1, 1,1)\}$, deci defectul lui *u*, adică $\dim_R$(Ker u), este egal cu 1. Pentru determinarea imaginii lui *u*, Im u $=\{u(x): x \in \mathbf{R}^3\} = \{y\in \mathbf{R}^2$: există $x \in R^3$ cu $y =u(x)\}$, observăm că sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \end{cases}$ este compatibil oricare ar fi y_1 şi y_2. Deci Im u $= \mathbf{R}^2$, şi rangul lui *u* este 2.

b) Ker u $= \{(0,0,0)\}$. Deoarece *u* este endomorfism pe un spaţiu de dimensiune finită şi Ker u $= \{ 0_{R^3} \}$, din Propoziţia 3.4.1 deducem că *u* este bijectiv şi deci, Im u $= \mathbf{R}^3$. Defectul lui *u* este 0, iar rangul este 3.

c) Ker u $= \{(-\alpha, \alpha, \alpha): \alpha \in \mathbf{R}\}$. Pentru determinarea imaginii lui *u* observăm că Im u $= \{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$, există $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ a.î. $(x_1+ x_2, x_2 - x_3, x_3 + x_1) =(y_1, y_2, y_3) \}$. Sistemul $x_1+ x_2 = y_1$, $x_2 - x_3 = y_2$, $x_3 + x_1 = y_3$ are soluţie dacă şi numai dacă $y_3 = y_1 - y_2$. Deci Im u $= \{(y_1, y_2, y_1 - y_2) : y_1, y_2 \in \mathbf{R}\}$.

O bază în Im u este $B = \{(1,0,1), (0,1,-1)\}$. Rangul lui *u* este 2 şi defectul este 0.

d) Ker u $=\{(0,0)\}$, Im u $= \{(\alpha, \beta, -\beta\}: \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Rangul este 2 şi defectul 0.

e) Ker u $=\{(\alpha,-\alpha), \alpha \in \mathbf{R}\}$, Im u $= \{(\alpha, -\alpha, 2\alpha\}: \alpha \in \mathbf{R}\}$. Defectul este 1 şi rangul este 1.

3. Fie $u : R^n \to R^n$ un endomorfism care verifică relaţia:

$$a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \ldots + a_1 u + I = O,$$

unde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1 \in R$, I este operatorul liniar identic şi O este operatorul liniar nul. Să se arate că *u* este automorfism.

R: Este suficient să arătăm că *u* este injectiv (vezi Propoziţia 3.4.1) sau, echivalent, că Ker u ={0}. Dacă $x \in$ Ker u, atunci u(x) = 0, şi ca urmare $u^k(x) = 0$ pentru orice $k \geq 1$. Ţinând cont de relaţia din ipoteză, se obţine I(x) = 0, adică x = 0.

5. Se consideră operatorul liniar u : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ care are proprietatea că $u(E_1)$ = (1, 8), $u(E_2)$ = (0,2), $u(E_3)$ = (1,-1), unde B = {E_1, E_2, E_3} este baza canonică din R^3 (E_1 = (1,0,0), E_2 = (0,1,0), E_3 = (0,0,1)). Se cere să determine matricea lui *u* în perechea de baze

B_1 = {(-1,0,0) , (1, -1,0), (-1, 1, -1)}

B_2 = {(0,1), (1,2)}

R: Conform Observaţiei 3.5.1 există un unic operatorul liniar *u* care îndeplineşte condiţiile. Matricea lui *u* în perechea de baze canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matricele L, de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^3$ la baza B_1, şi respectiv M, de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^2$ la baza B_2, sunt $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Matricea lui *u* în perechea de baze B_1, B_2 este $LAM^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine operatorii liniari u : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ care satisfac condiţiile $u(v_1)$ = (9, -9, 3), $u(v_2)$ = (-7, 5, 3), $u(v_3)$ = (8, -11, 4), unde v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (1,1,1). Să se calculeze u(v) , unde v = (1, 2, 3).

R: Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbf{R}^3$. Atunci, conform Observației 3.5.1, există un unic operator liniar u care îndeplineşte condițiile din enunț. Determinăm matricea lui u în baza canonică din $\mathbf{R}^3$: $B = \{E_1, E_2, E_3\}$, unde $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$. Ținând cont că dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, atunci $x = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$ şi $u(x) = x_1u(E_1) + x_2u(E_2) + x_3u(E_3)$, obținem sistemul

$$\begin{cases} u(E_1) + u(E_2) = 9E_1 - 9E_2 + 3E_3 \\ u(E_1) - u(E_2) = -7E_1 + 5E_2 + 3E_3 \\ u(E_1) + u(E_2) + u(E_3) = -8E_1 - 11E_2 + 4E_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(E_1) = E_1 - 2E_2 + 3E_3 \\ u(E_2) = 8E_1 - 7E_2 \\ u(E_3) = -E_1 - 2E_2 + E_3 \end{cases}.$$

După cum este uşor de văzut, matricea lui u în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, atunci $u(x) = (A^T x^T)^T = (x_1 + 8x_2 - x_3, -2x_1 - 7x_2 - 2x_3, 3x_1 + x_3)$. Ca urmare, $u(v) = (14, -22, 6)$ pentru $v = (1,2,3)$.

7. Se consideră bazele $B_1 = \{(-2, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ şi $B_2 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 0)\}$ în $\mathbf{R}^3$, şi transformările liniare $u_1, u_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Dacă matricea lui u_1 în baza B_1 este

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ iar matricea lui u_2 în baza B_2 este $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

să se determine u_1, u_2, $u_1 + u_2$, u_2u_1, u_2^{-1}.

R: Matricea de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^3$ la baza B_1 (respectiv la baza B_2) este

$C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (respetiv $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$).

Dacă L_1, respectiv L_2 sunt matricele lui u_1, respectiv u_2 în baza canonică, atunci $A_1 = C_1L_1C_1^{-1}$, respectiv $A_2 = C_2L_2C_2^{-1}$. În consecinţă, $L_1 = C_1^{-1}A_1C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -22 & 11 & -1 \end{pmatrix}$, iar matricea lui u_2 în baza canonică este $L_2 = C_2^{-1}A_2C_2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 13 \\ -14 & 3 & -21 \\ -9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$. Deci

$u_1(x) = (2x_1+3x_2-22x_3,\ x_1+5x_2+11x_3,\ x_1+4x_2-x_3)$,

$u_2(x) = (10x_1-14x_2-9x_3,\ -x_1+3x_2,\ 13x_1-21x_2-12x_3)$, pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Definiţia sumei operatorilor liniari şi Observaţia 3.5.2 arată că $(u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x) = (L_1^Tx^T)^T + (L_2^Tx^T)^T = xL_1 + xL_2 = x(L_1 + L_2) = (L_1 + L_2)^Tx^T$. Deci matricea asociată operatorului $u_1 + u_2$ în baza canonică este $L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 14 \\ -11 & 8 & -17 \\ -31 & 11 & -13 \end{pmatrix}$.

Atunci $(u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x) = (12x_1-11x_2-31x_3,\ 8x_2+11x_3,\ 14x_1-17x_2-13x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Raţionând ca mai sus şi folosind definiţia produsului operatorilor şi Observaţia 3.5.2 rezultă că $u_1u_2(x) = u_1(u_2(x)) = u_2(x)\, L_1 = xL_2L_1$. Astfel, matricea asociată lui u_2u_1 în baza canonică este $L_1L_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ -76 & 12 & -114 \\ -365 & 55 & -505 \end{pmatrix}$, iar pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$(u_2u_1)(x) = u_2(u_1(x)) = (-3x_1 - 76x_2 - 365x_3,\ x_1 + 12x_2 + 55x_3,\ -7x_1 - 114x_2 - 505x_3)$.

Dacă X este matricea asociată lui u_2^{-1} în baza canonică, atunci $X = L_2^{-1}$, căci matricea asociată lui $u_2^{-1}u_2$, în aceeaşi bază, este pe de o parte I iar pe de alta XL_2 ($X = L_2^{-1}$). Cum $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 6/5 & 2/5 & 3/5 \\ -7/10 & 1/10 & -14/15 \\ -9/10 & -3/10 & -8/15 \end{pmatrix}$, rezultă că pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$(u_2^{-1})(x) = \left(\frac{6}{5}x_1-\frac{7}{10}x_2-\frac{9}{10}x_3,\ \frac{2}{5}x_1+\frac{1}{10}x_2-\frac{3}{10}x_3,\ \frac{3}{5}x_1-\frac{14}{15}x_2-\frac{8}{15}x_3\right).$$

8. Să se afle valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare pentru operatorii liniari

a) u: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, u(x) = ($3x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + 3x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + 3x_3$);

b) u: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, u(x) = ($x_2 + x_3$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_2$);

c) u: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, u(x) = ($x_1 + 2x_2 + 3x_3$, x_2, $3x_1 + 2x_2 + x_3$);

d) u: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, u(x) = ($-3x_1 + 2x_2 + x_3$, $-7x_1 + 4x_2 + 2x_3$, $-5x_1 + 3x_2 + 2x_3$),

unde x = (x_1, x_2, x_3).

R: a) Matricea asociată operatorului u în baza canonică este A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică este $(\lambda-2)^2(\lambda-5) = 0$ iar valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Rezolvând sistemul $u(x) = \lambda_1 x$, obţinem $V_{\lambda_1} = \{\alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. În mod asemănător se obţine $V_{\lambda_3} = \{\alpha(1, 1, 1), \alpha \in \mathbf{R}\}$.

b) Matricea asociată: A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică: $(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$; valorile proprii: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$; subspaţiile proprii V_{λ_1} şi respectiv V_{λ_3} sunt aceleaşi ca la punctul a). c) Matricea asociată: A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ecuaţia caracteristică: $(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0$; valorile proprii: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$; subspaţiile proprii: $V_{\lambda_1} = \{\alpha(0, 1, 0), \alpha \in \mathbf{R}\}$, $V_{\lambda_2} = \{\alpha(-1, 0, 1), \alpha \in \mathbf{R}\}$, $V_{\lambda_3} = \{\alpha(1, 4/3, 1), \alpha \in \mathbf{R}\}$.

d) Matricea asociată: A=$\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; ecuaţia caracteristică: $(\lambda-1)^3 = 0$; valorile proprii: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; subspaţiul propriu: $V_{\lambda_1} = \{\alpha(-3, 1, 1), \alpha \in \mathbf{R}\}$.

9. Să se verifice dacă operatorii liniari definiţi la Exerciţiul 8 sunt diagonalizabili şi în caz afirmativ să se scrie forma lor diagonală.

R: a) Operatorul liniar u are toate valorile proprii reale şi, în plus, multiplicitățile algebrice ale acestora coincid cu cele geometrice. Aplicând Teorema 3. 7. 1, deducem că u este diagonalizabil. Matricea asociata operatorului liniar u în baza B = {e_1 = (-1, 1, 0), e_2 = (-1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 1)} este D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

b) operatorul este diagonalizabil. Matricea asociată lui u în baza B = {e_1 = (-1, 1, 0), e_2 = (-1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 1)} este D = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. c) este diagonalizabil. Matricea asociată lui u în baza B = {e_1 = (0, 1, 0), e_2 = (-1, 0, 1), e_3 = (1, 4/3, 1)} $\{\alpha(0, 1, 0)\ ,\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ este D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

d) operatorul nu este diagonalizabil.

10. Să se cerceteze dacă endomorfismele de mai jos sunt diagonalizabile în cazul în care matricea asociată într-o bază a spațiului de definiție este:

a) A=$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, b) A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, c) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

R: Se aplică Teorema 3.7.1. a) Da. Matricea diagonala: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. b) Da. Matricea diagonala: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{10} \end{pmatrix}$. c) Da . Matricea diagonala: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

CAPITOLUL 4

SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE/UNITARE

4.1. Produs scalar. Spații euclidiene şi spații unitare-definiție

Definiția 4.1.1. *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**). Se numeşte produs scalar pe V o aplicație*

$$<> : V \times V \to K$$

care are următoarele proprietăți:

1. $<x, x> \geq 0$ pentru orice $x \in V$; $<x, x> = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$.

2. $<x + y, z> = <x, z> + <y, z>$ pentru orice $x, y, z \in V$.

3. $<\lambda x, y> = \lambda <x, y>$ pentru orice $\lambda \in K$ şi $x \in V$.

4. $<x, y> = \overline{<y, x>}$ pentru orice $x, y \in V$.

Perechea (V,<·,·>) se numeşte *spațiu prehilbertian real* dacă K= **R**, respectiv *complex* dacă K= **C**. Dacă V este un spațiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**), înzestrat cu produsul scalar < ·, · >, atunci:

1. două elemente x şi y din V se numesc *ortogonale* (şi se foloseşte notația $x \perp y$) dacă $<x, y> = 0$.

2. spunem că vectorul $x \in V$ este *ortogonal* pe submulțimea nevidă A a lui V şi notăm $x \perp A$, dacă $<x, y>=0$ pentru orice $y \in A$.

3. două submulțimi nevide A şi B ale lui V sunt *ortogonale* şi se notează $A \perp B$, dacă $<x, y>=0$ pentru orice $x \in A$ şi orice $y \in B$.

4. o familie $\{x_i\}_{i \in I}$ de elemente ale lui V se numeşte *sistem ortogonal* sau familie ortogonală dacă $<x_i, x_j> =0$ pentru orice $i \neq j$, $i,j \in I$.

5. un sistem ortogonal $\{x_i\}_{i\in I}$ se numeşte *ortonormat* dacă $\|x_i\| = 1$ pentru orice $i \in I$.

Un spaţiu vectorial real (respectiv complex), finit dimensional, dotat cu un produs scalar se numeşte *spaţiu vectorial euclidian* (respectiv *spaţiu unitar*).

Observaţia 4.1.1. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**) înzestrat cu produsul scalar $<\cdot,\cdot>$. Atunci

1. $<0, y> = <x, 0> = 0$ pentru orice $x, y \in V$. (Într-adevăr, aplicând proprietatea 3 a produsului scalar pentru $\lambda = 0$, obţinem $<0, y> = 0$; ţinând cont de proprietatea 4, rezultă $< x, 0 > = \overline{<0,x>} = 0$)

2. $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha < x, z > + \beta < x, z >$ pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y, z \in V$. (Afirmaţia rezultă din proprietăţile 2 şi 3 ale produsului scalar) .

3. $<x, \alpha y + \beta z> = \overline{\alpha} < x, y > + \overline{\beta} < x, z >$ pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y, z \in V$. Într-adevăr, $<x, \alpha y + \beta z> = \overline{<\alpha y+\beta z, x>} = \overline{\alpha<y,x>+\beta<z,x>} = \overline{\alpha}\,\overline{<y,x>} + \overline{\beta}\,\overline{<z,x>} = \overline{\alpha}<x, y> + \overline{\beta}<x, z>$.

4. Dacă K = **R**, atunci $<x, y> = <y, x>$ pentru orice $x, y \in V$. De aici rezultă $<x, \alpha y + \beta z> = \alpha < x, y > + \beta < x, z >$ pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y, z \in V$.

Exemplul 4.1.1. *1. Spaţiul vectorial real* $\boldsymbol{R}^n$ *poate fi înzestrat cu produsul scalar (numit produsul scalar standard sau canonic)*

$$<x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

2. În spaţiul vectorial complex $\boldsymbol{C}^n$ *(K =* $\boldsymbol{C}$*) se poate introduce produsul scalar (numit produsul scalar standard sau canonic)*

$$<x, y> = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

3. Fie spațiul vectorial real $C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R} \mid f \text{ continuă}\}$, *(K* $= \mathbf{R}$). *Aplicația* $<\cdot, \cdot>: C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbf{R}$, $<f, g> = \int_a^b f(x)g(x)dx$

este un produs scalar.

4. Considerăm spațiul vectorial real $M_n(\mathbf{R})$*(mulțimea matricelor de ordinul* $n \in \mathbf{N}^*$ *cu elemente din* $\mathbf{R}$*). Aplicația* $<\cdot, \cdot>: M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

$<A, B> = Trace(B^t A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{ji}$, *unde* $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ *şi* $B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le n}$

este un produs scalar.

5. În spațiul $M_n(\mathbf{C})$ *peste corpul* $\mathbf{C}$ *se poate introduce produsul scalar*

$<A, B> = Trace(\overline{B^t} A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{b}_{ji}a_{ji}$, *unde* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *şi* $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

4.2. Norma indusă de un produs scalar

Teorema 4.2.1. (**inegalitatea lui Schwarz**). *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K =* $\mathbf{R}$ *sau K =* $\mathbf{C}$*) înzestrat cu produsul scalar* $<\cdot, \cdot>$. *Pentru orice* $x, y \in V$, $|<x, y>|^2 \le <x, x><y, y>$. *Egalitatea are loc dacă şi numai dacă vectorii x şi y sunt liniar dependenți.*

Demonstrație. Dacă $<x, y> = 0$, inegalitatea este evidentă, deci putem presupune $<x, y> \neq 0$ (ceea ce implică $x \neq 0$ şi $y \neq 0$) . Pentru orice $\lambda \in K$, avem $<\lambda x + y, \lambda x + y> \ge 0$, adică $|\lambda|^2 <x, x> + \lambda <x, y> + \overline{\lambda}<y, x> + <y, y> \ge 0$. Considerând $\lambda = t\frac{|<x, y>|}{<x, y>}$, $t \in \mathbf{R}$ obținem $t^2 <x, x> + 2t |<x, y>| + <y, y> \ge 0$.

Cum inegalitatea de mai sus are loc pentru orice $t \in \mathbf{R}$, rezultă că discriminantul $\Delta \leq 0$, unde $\Delta = 4|<x, y>|^2 - 4<x, x><y, y>$. Deci

$$|<x, y>|^2 \leq <x, x><y, y>.$$

Presupunem că avem egalitate: $|<x, y>|^2 = <x, x><y, y>$. Atunci discriminantul $\Delta = 4|<x, y>|^2 - 4<x, x><y, y> = 0$. Ca urmare, există t_0 astfel încât $t_0^2 <x, x> + 2t_0 |<x, y>| + <y, y> = 0$. Considerând $\lambda_0 = t_0 \dfrac{|<x, y>|}{<x, y>}$, obţinem $|\lambda_0|^2 <x, x> + \lambda_0<x, y> + \overline{\lambda_0}<y, x> + <y, y> \geq 0$ adică $<\lambda_0 x + y, \lambda_0 x + y> = 0$. De aici rezultă că $\lambda_0 x + y = 0$ sau, echivalent, x şi y sunt liniar dependenţi.

Reciproc, dacă x şi y sunt liniar dependenţi, atunci există $\alpha \in K$ astfel încât $y = \alpha x$, deci $<x, y> = <x, \alpha x> = \overline{\alpha}<x, x>$.

În consecinţă, $|<x, y>|^2 = |\alpha|^2|<x, x>|^2 = <x, x><\alpha x, \alpha x> = <x, x><y, y>$.

Definiţia 4.2.1. *Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**). Aplicaţia $\|\cdot\|: V \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile următoare:*

1. $\|x\| \geq 0$, pentru orice $x \in V$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$.

2. $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$, pentru orice $x \in V$ şi $\alpha \in K$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pentru orice $x, y \in V$

se numeşte normă pe V. Spaţiul vectorial pe care s-a definit o normă se numeşte ***spaţiu vectorial normat****.*

Teorema 4.2.2. *Orice spaţiu prehilbertian V peste corpul K (K =**R** sau K = **C**) poate fi înzestrat cu o normă:*

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>} \text{ pentru orice } x \in V.$$

Demonstraţie. Verificăm faptul că $\| \cdot \|$ îndeplineşte proprietăţile unei norme. Evident $\| x \| \geq 0$ pentru orice $x \in V$, şi $\| x \| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$. Fie $\alpha \in K$ şi $x \in V$, $\| \alpha x \|^2 = <\alpha x, \alpha x> = \alpha \overline{\alpha}<x,x> = |\alpha|^2 \|x\|^2$. Fie $x, y \in V$. Avem $\| x + y \|^2 = <x + y, x + y> = <x, x> + <x, y> + <y, x> + <y, y> = <x, x> + 2\mathrm{Re}<x, y> + <y, y> \leq <x, x> + 2|<x, y>| + <y, y> \leq <x, x> +2\sqrt{<x,x><y,y>} + <y, y> = \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2,$$

de unde obţinem $\| x +y \| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inegalitatea lui Minkowski*).

Observaţia 4.2.1. 1. Dacă V este un spaţiu prehilbertian şi $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $<\cdot, \cdot>$ de pe V ($\| x \| = \sqrt{<x,x>}$), atunci inegalitatea lui Schwarz se scrie

$$|<x, y>| \leq \|x\| \|y\|, \text{ pentru orice } x, y \in V.$$

2. Orice spaţiu prehilbertian V este un spaţiu metric, putând fi înzestrat cu *distanţa* definită prin $d(x, y) = \| x - y\| = \sqrt{<x - y, x - y>}$.

pentru orice $x, y \in V$. În virtutea acestei proprietăţi se poate vorbi despre şiruri convergente şi şiruri fundamentale (sau Cauchy) în V.

4.3. Baze ortonormate

Propoziţia 4.3.1. *Fie V un spaţiu prehilbertian (real sau complex). Orice sistem ortogonal $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de vectori nenuli din V este liniar independent.*

Demonstraţie. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

Pentru orice $1 \leq j \leq n$, avem $<\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, x_j> = 0$ adică $\alpha_1<x_1, x_j> + \alpha_2<x_2, x_j> + \ldots + \alpha_n <x_n, x_j> = 0$. Din condiţia de

ortogonalitate deducem că $\alpha_j < x_j, x_j > = 0$. Cum $x_j \neq 0$, rezultă că $< x_j, x_j > \neq 0$, şi deci $\alpha_j = 0$ pentru orice $1 \leq j \leq n$.

Definiţia 4.3.1. *O bază $\{e_i\}_{i\in I}$ a spaţiului prehilbertian V se numeşte bază ortogonală dacă este sistem ortogonal (adică dacă $< e_i, e_j> = 0$ pentru orice $i \neq j$). Dacă, în plus, $\| e_i \| =1$ pentru orice $i \in I$, atunci baza $\{e_i\}_{i\in I}$ se numeşte bază ortonormată.*

Teorema 4.3.1. (**procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt**) *Fie V un spaţiu euclidian sau unitar şi fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în V astfel încât pentru orice $1 \leq k \leq n$, sistemele de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ generează acelaşi subspaţiu.*

Demonstraţie. Vom construi mai întâi o bază ortonormală $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ în V astfel încât pentru orice $1 \leq k \leq n$, sistemele de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ generează acelaşi subspaţiu. Baza cu proprietăţile din enunţul teoremei se obţine din $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ definind $e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i$, $i =1,..,n$.

Luăm $f_i = v_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} f_j$, $1 \leq i \leq n$ şi vom determina scalarii α_{ij} ($2 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq i -1$) din condiţiile $<f_i, f_j> = 0$, $i \neq j$. Folosim inducţia după *k*. Pentru *k = 1*, avem $f_1 = v_1 \neq 0$, şi deci $\{f_1\}$ şi $\{e_1\}$ generează acelaşi subspaţiu. Pentru *k* = 2, $f_2 = v_2 + \alpha_{21} f_1$. Condiţia $<f_2, f_1 > = 0$ conduce la

$$\alpha_{21} = - \frac{< v_2, f_1 >}{< f_1, f_1 >}.$$

Cum $f_1 = v_1$ şi $f_2 = v_2 + \alpha_{21}f_1$, rezultă că f_1 şi f_2 aparțin spațiului generat de $\{v_1, v_2\}$. Deci spațiul generat de $\{f_1, f_2\}$ este conținut în spațiului generat de $\{v_1, v_2\}$. Reciproc, deoarece $v_1 = f_1$ şi $v_2 = f_2 - \alpha_{21}f_1$, spațiul generat de $\{v_1, v_2\}$ este conținut în spațiului generat de $\{f_1, f_2\}$. Să presupunem că am construit vectorii $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ortogonali doi câte doi şi că, pentru orice $1 \le i \le k$, sistemele de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_i\}$ generează acelaşi subspațiu. Avem $f_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\alpha_{k+1,j}f_j$, iar relațiile $<f_{k+1}, f_i> = 0$, pentru orice $1 \le i \le k$, sunt echivalente cu $\alpha_{k+1,i} = -\dfrac{<v_{k+1}, f_i>}{<f_i, f_i>}$, $1 \le i \le k$. Numitorul $<f_i, f_i>$ este nenul pentru $1 \le i \le k$. În caz contrar, spațiul generat de vectori $\{f_1, f_2, \ldots, f_i\}$ este egal cu $\{f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}\}$ şi, din ipoteza de inducție, rezultă că $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ şi $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ generează acelaşi subspațiu. Deci v_i se scrie ca o combinație liniară de vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$, ceea ce contrazice liniar independența vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Deoarece $f_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\alpha_{k+1,j}f_j$ şi spațiile generate de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ coincid, rezultă că spațiul generat de $\{f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}\}$ este conținut în spațiul generat de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}\}$. Incluziunea inversă se obține ținând cont de faptul că $v_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\alpha_{k+1,j}f_j$ iar spațiile generate de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ coincid. În consecință , sistemul de vectori $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V. El este şi sistem liniar independent fiind format din vectori ortogonali. Deci $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este o bază ortogonală a lui V. Ca urmare, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde

$$e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i \text{ pentru orice } 1 \le i \le n,$$

este o bază ortonormată a lui V cu proprietatea că pentru orice $1 \le k \le n$, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ şi $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ generează acelaşi subspaţiu.

Exemplul 4.3.1. *Fie spaţiul vectorial* $\boldsymbol{R}^4$ *înzestrat cu produsul scalar canonic (standard):*

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \quad \textit{pentru } x = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Fie $B = \{v_1, v_2, v_3, v_3\}$, *unde* $v_1 = (-1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, -5, -3)$, $v_3 = (-3, 2, 8, 7)$, $v_4 = (0, -1, 1, 0)$. *Vom aplica bazei B procedeul de ortogonalizare Gram- Schmidt (ca în demonstraţia teoremei precedente). Avem*

$$f_1 = v_1 = (-1, 2, 2, 1),\ f_2 = v_2 + \alpha_{21} f_1$$

unde α_{21} *se determină punând condiţia ca* $<f_2, f_1> = 0$:

$$\alpha_{21} = -\frac{<v_2, f_1>}{<f_1, f_1>} = -\frac{-10}{10} = 1.$$

Deci $f_2 = v_2 + f_1 = (-2, 3, -3, -2)$. *Mai departe,* $f_3 = v_3 + \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2,$ *unde* α_{31} *şi* α_{32} *sunt determinate de condiţiile* $<f_3, f_i> = 0$, $i = 1,2$:

$$\alpha_{3i} = -\frac{<v_3, f_i>}{<f_i, f_i>},\ \ i = 1,2.$$

Efectuând calculele obţinem $\alpha_{31} = -\dfrac{<v_3, f_1>}{<f_1, f_1>} = -\dfrac{30}{10} = -3$

$$\alpha_{32} = -\frac{<v_3, f_2>}{<f_2, f_2>} = -\frac{-26}{26} = 1 \textit{ şi } f_3 = v_3 - 3f_1 + f_2 = (-2, -1, -1, 2).$$

Ultimul vector din baza ortogonală este $f_4 = v_4 + \alpha_{41} f_1 + \alpha_{42} f_2 + \alpha_{43} f_3,$ *unde* α_{4i} *sunt determinate de condiţiile* $<f_4, f_i> = 0$, $i = 1,2,3$:

$$\alpha_{4i} = -\frac{<v_4, f_i>}{<f_i, f_i>},\ \ i = 1,2,3.$$

Efectuând calculele obținem $\alpha_{41} = -\dfrac{<v_4, f_1>}{<f_1, f_1>} = -\dfrac{0}{10} = 0$, $\alpha_{42} = -\dfrac{<v_4, f_2>}{<f_2, f_2>} = -\dfrac{-6}{26} = \dfrac{3}{13}$, $\alpha_{43} = -\dfrac{<v_4, f_3>}{<f_3, f_3>} = -\dfrac{0}{10} = 0$

şi $f_4 = v_4 + 0f_1 + \dfrac{3}{13}f_2 + 0f_3 = v_4 + \dfrac{3}{13}f_2 = (-\dfrac{6}{13}, -\dfrac{4}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{6}{13})$.

Baza ortonormată corespunzătoare $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *se obține luând*

$e_i = \dfrac{1}{\|f_i\|}f_i$, $i = 1,2,3,4$. *Deci* $e_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|}f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 2, 1)$,

$e_2 = \dfrac{1}{\|f_2\|}f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(-2, 3, -3, -2)$, $e_3 = \dfrac{1}{\|f_3\|}f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, -1, 2)$

$$e_4 = \frac{1}{\|f_4\|}f_4 = \frac{1}{\sqrt{8/13}}\left(-\frac{6}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right) = \frac{1}{\sqrt{8/13}}\frac{2}{13}(-3, -2, 2, 3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, -2, 2, 3) = \frac{\sqrt{26}}{26}(-3, -2, 2, 3).$$

Teorema 4.3.2. *Fie* V *un spațiu vectorial euclidian sau unitar finit dimensional,* $dim_K V = n$, *şi fie* $V_1 \subset V$ *un subspațiu al lui* V. *Atunci există şi este unic un subspațiu vectorial* $V_2 \subset V$ *ortogonal pe* V_1 ($V_2 \perp V_1$) *astfel încât* $V = V_1 \oplus V_2$. *Suspațiul* V_2, *notat şi* $V_1^{\perp}$, *este numit complementul ortogonal al lui* V_1.

Demonstrație. Fie $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ o baza ortonormată a lui V_1. Completăm B_1 la o bază $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, .., e_n\}$ a lui V. Folosind procedeul de ortonormare Gram Schmidt obținem o bază ortonormată $B' = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_{m+1}, .., f_n\}$ a lui V. Notăm cu V_2 subspațiul generat de familia $\{f_{m+1}, .., f_n\}$. În mod evident $V_1 + V_2 = V$. În plus, $V_1 \cap V_2 = (0)$. Într-adevăr, dacă $x \in V_1 \cap V_2$, atunci există $x_i \in K$, $i = 1,..,n$ astfel încât x

$= \sum_{i=1}^{m} x_i e_i = \sum_{i=m+1}^{n} x_i f_i$. De aici rezultă că avem o combinație liniară nulă, $\sum_{i=1}^{m} x_i e_i - \sum_{i=m+1}^{n} x_i f_i = 0$, a vectorilor din baza B'. Acest lucru nu este posibil decât dacă $x_i = 0$, $i = 1,..,n$. Deci $x = 0$ şi $V_1 \cap V_2 = (0)$. Prin urmare $V = V_1 \oplus V_2$ şi existența complementului ortogonal a fost demonstrată.

Pentru a arăta unicitatea, considerăm un alt subspațiu vectorial V_3, $V_3 \perp V_1$ astfel încât $V = V_1 \oplus V_3$. Fie $v_3 \in V_3$. Cum $v_3 \in V_3 \subset V = V_1 \oplus V_2$, v_3 se poate reprezenta unic sub forma $v_3 = v_1 + v_2$ cu $v_1 \in V_1$ şi V_2. Din faptul că V_3 şi V_2 sunt ortogonale pe V_1 rezultă că $v_3 - v_2 \perp V_1$ şi deci $< v_3 - v_2, v_1> = 0$, de unde $< v_1, v_1> = 0$, adică $v_1 = 0$. Ținând cont că $v_3 = v_1 + v_2$, obținem $v_3 = v_2 \in V_2$. Analog se demonstrează faptul că $V_2 \subset V_3$.

4.4. Operatori liniari pe spații euclidiene sau unitare

Definiția 4.4.1. *Fie V şi W două spații euclidiene sau unitare şi fie u : V → W un operator liniar (transformare liniară). Transformarea liniară u* : W → V definită prin*

$$<u(x), y> = <x, u^*(y)> \text{ pentru orice } x \in V \text{ şi } y \in W,$$

se numeşte transformarea adjunctă lui u.

Un endomorfism u : V → V cu proprietatea că uu = u*u = I (transformarea liniară identică) se numeşte operator unitar, dacă V este spațiu unitar, sau operator ortogonal, dacă V este spațiu euclidian.*

Un endomorfism u : V → V se numeşte autoadjunct dacă $u = u^*$. În cazul în care V este spațiu euclidian, un endomorfism autoadjunct se mai numeşte endomorfism simetric, iar in cazul în care V este unitar, un

endomorfism autoadjunct se mai numeşte endomorfism hermitian.

Observația 4.4.1. Transformarea adjunctă lui *u* este bine definită, în sensul că $u^* \in L(V)$. Într-adevăr, dacă $x, y_1, y_2 \in V$ şi $\alpha, \beta \in K$ ($K = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$) atunci $\langle x, u^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle = \langle u(x), \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha}\langle u(x), y_1\rangle + \overline{\beta}\langle u(x), y_2\rangle = \langle x, \alpha u^*(y_1) + \beta u^*(y_2)\rangle$. În particular, şirul de egalități de mai sus are loc şi pentru $x = u^*(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha u^*(y_1) + \beta u^*(y_2)$. În acest caz avem $\langle x,x\rangle = 0$, de unde $x = 0$, adică $u^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha u^*(y_1) + \beta u^*(y_2)$. Demonstrația este terminată în virtutea Observației 3.1.2.

Propoziția 4.4.1. *Fie V un spațiu euclidian sau unitar. Aplicația*

$$u \to u^* \; [: L(V) \to L(V)]$$

are următoarele proprietăți:

1. $(u + v)^* = u^* + v^*$; *2.* $(uv)^* = v^* u^*$; *3.* $(u^*)^* = u$

4. $(\alpha v)^* = \overline{\alpha} u^*$, *dacă V este unitar;* $(\alpha v)^* = \alpha u^*$, *dacă V este euclidian*

5. $I^* = I$ *(I este transformarea liniară identică pe V)*

6. $O^* = O$ *(O este transformarea liniară nulă pe V)*

7. Dacă u este inversabil, atunci $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Demonstrație. Toate afirmațiile de mai sus rezultă prin aplicarea directă a proprietăților produsului scalar. De exemplu, în cazul proprietății 1, observăm că $\langle (u + v)(x), y\rangle = \langle x, (u + v)^*(y)\rangle$, oricare ar fi $x, y \in V$. Pe de altă parte, $\langle (u + v)(x), y\rangle = \langle u(x) + v(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle v(x), y\rangle$

$$= \langle x, u^*(y)\rangle + \langle x, v^*(y)\rangle = \langle x, u^*(y) + v^*(y)\rangle = \langle x, (u^* + v^*)(y)\rangle.$$

Deci, pentru orice $x, y \in V$, avem $\langle x, (u + v)^*(y)\rangle = \langle x, (u^* + v^*)(y)\rangle$

sau, echivalent, $<x, (u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y)> = 0$. ca şi în observaţia de mai sus luăm $x = (u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y)$ şi obţinem
$<(u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y), (u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y)> = 0$, de unde $(u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y) = 0$ pentru orice y. În consecinţă, $(u + v)^* = u^* + v^*$. (Restul afirmaţiilor sunt lăsate ca exerciţiu cititorului.)

Propoziţia 4.4.1. *Fie V un spaţiu unitar (respectiv euclidian) şi $u : V \to V$ un endomorfism. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *u este unitar (respectiv ortogonal);*
2. *$u^*u = I$ (transformarea liniară identică);*
3. *u păstrează produsul scalar ($< u(x), u(y)> = < x, y>$ pentru orice $x, y \in V$);*
4. *$\|u(x)\| = \|x\|$ pentru orice $x \in V$ ($\|x\| = \sqrt{< x, x >}$);*
5. *u transformă orice bază ortonormată într-o bază ortonormată;*
6. *matricea A a lui u într-o bază ortonormată, satisface condiţia $\overline{A^t}\, A = I$ (respectiv, $A^tA = I$).*

Demonstraţie. Este evident că "$1 \Rightarrow 2$". Arătăm că "$2 \Rightarrow 1$". Din $u^*u = I$ rezultă uşor că *u* este injectivă, deoarece I este, în particular, injectivă. Deoarece V este de dimensiune finită, rezultă că de fapt *u* este un operator liniar bijectiv. În consecinţă, condiţia $u^*u = I$ implică $u^* = u^{-1}$. Prin urmare $uu^* = uu^{-1} = I$, şi deci *u* este unitar (respectiv, ortogonal).

"$2 \Rightarrow 3$". Pentru orice $x, y \in V$, $<u(x), u(y)> = <x, u^*(u(y))> = <x, y>$.

"$3 \Rightarrow 2$". Pentru orice $x, y \in V$, $<x, y> = <u(x), u(y)> = <x, u^*(u(y))> = <x, u^*u(y)>$. Deci, $<x, u^*u(y) - y> = 0$ pentru orice $x, y \in V$. În particular, pentru $x = u^*u(y) - y$, obţinem $< u^*u(y) - y, u^*u(y) - y> = 0$, de unde

$u^*u(y) - y = 0$ pentru orice $y \in V$. Deci $u^*u = I$.

"3 $\Rightarrow$ 4". Pentru orice $x \in V$, $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

"4 $\Rightarrow$ 3". Dacă V este unitar, atunci pentru orice $x, y \in V$

$$\langle x, y\rangle = (1/4)(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2).$$

Deci, pentru orice $x, y \in V$, avem $\langle u(x), u(y)\rangle = (1/4)(\| u(x) + u(y)\|^2 - \| u(x) - u(y)\|^2 + i\| u(x) + i u(y)\|^2 - i \| u(x) - i u(y)\|^2) = (1/4)(\| u(x + y)\|^2 - \| u(x -y)\|^2 + i\| u(x + iy)\|^2 - i \| u(x - iy) \|^2) = (1/4) (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2) = \langle x, y\rangle$. Dacă V este euclidian, atunci

$$\langle x, y\rangle = (1/4) (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \text{ oricare ar fi } x, y \in V.$$

Deci, pentru orice $x, y \in V$, avem

$$\langle u(x), u(y)\rangle = (1/4) (\| u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) =$$

$$(1/4) (\| u(x + y)\|^2 - \| u(x -y)\|^2) =(1/4) (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) =\langle x, y\rangle .$$

"3 $\Rightarrow$ 5". Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V. Deoarece

$$\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 0 \text{ pentru } i \neq j \text{ şi } \langle u(e_i), u(e_i)\rangle = \langle e_i, e_i\rangle = 1,$$

rezultă că $\{u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)\}$ este o bază ortonormată.

"5 $\Rightarrow$ 3". Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V şi fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ şi $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in V$. Avem $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle u(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i), u(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i)\rangle$ $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, y\rangle$.

"2 $\Leftrightarrow$ 6". Fie $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V şi fie A matricea asociată lui u în baza respectivă. Dacă $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ este matricea asociată lui u în baza B, atunci este clar că $\langle u^*(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, u(e_j)\rangle = \overline{a_{ji}}$. Dacă V este euclidian atunci $\overline{a_{ji}} = a_{ji}$. De aici rezultă că matricea lui u^* în baza B este $\overline{A^t}$ dacă V este unitar, respectiv A^t dacă V

este euclidian. Relaţia $u^*u = I$ este echivalentă cu $\overline{A^t}\,A = I$ dacă V este unitar, respectiv cu $A^tA = I$ dacă V este euclidian.

4.5. Vectori şi valori proprii pentru endomorfisme autoadjuncte

Teorema 4.5.1. *Fie V un spaţiu unitar. Dacă u: V → V este un endomorfism hermitian, atunci valorile proprii asociate lui u sunt reale.*

Demonstraţie. Fie λ o valoare proprie a lui *u* şi fie x un vector propriu asociat valorii proprii λ. Avem

$$\lambda = \frac{<u(x), x>}{<x, x>} = \frac{<x, u(x)>}{<x, x>} = \frac{\overline{<u(x), x>}}{<x, x>} = \overline{\lambda}.\text{ Deci } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Teorema 4.5.2. *Fie V un spaţiu unitar sau euclidian. Dacă u: V → V este un endomorfism autoadjunct, atunci vectorii proprii corespunzători la valorile proprii distincte sunt ortogonali.*

Demonstraţie. Fie x_1 şi x_2 vectori proprii corespunzători valorilor proprii λ_1, respectiv λ_2. Avem $\lambda_1 <x_1, x_2> = <\lambda_1 x_1, x_2> = <u(x_1), x_2> = <x_1, u(x_2)> = <x_1, \lambda_2 x_2> = \overline{\lambda_2} <x_1, x_2> = \lambda_2 <x_1, x_2>$. Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci $<x_1, x_2> = 0$.

Teorema 4.5.3. *Fie V un spaţiu unitar sau euclidian. Dacă u: V → V este un endomorfism autoadjunct, atunci există o bază ortonormată a lui V formată din vectori proprii ai lui u. Prin urmare, u este diagonalizabil.*

Demonstraţie. Presupunem că dimensiunea lui V este *n*. Polinomul caracteristic $P_u(\lambda)$ asociat lui *u* admite cel puţin o rădăcină complexă λ_1

(eventual multiplă de ordinul n). Deoarece u este autodjunct, conform Teoremei 4.5.1, λ_1 este reală (fiind valoare proprie). Valorii proprii λ_1 îi corespunde un vector propriu e_1. Putem presupune că $\|e_1\| = 1$ (eventual înlocuindu-l cu $\frac{1}{\|e_1\|}e_1$) . Fie V_1, complementul ortogonal al spaţiului generat de e_1, $V_1 = \{e_1\}^{\perp}$. Subspaţiul V_1 este invariant la u[*)].

Într-adevăr, dacă $x \in V_1$, atunci

$$<u(x), e_1> = <x, u(e_1)> = <x, \lambda_1 e_1> = \lambda_1 <x, e_1> = 0,$$

deci $u(x) \in \{e_1\}^{\perp} = V_1$. Dacă $u_1 = u|V_1$ este restricţia lui u la V_1, atunci u_1 este un endomorfism autoadjunct. Fie e_2 un vector propriu de normă 1 al lui u_1 (în particular, e_2 este vector propriu al lui u) . Deoarece $e_2 \in V_1$, rezultă că $e_2 \perp e_1$. Fie $V_2 = \{e_1, e_2\}^{\perp}$. De asemenea V_2 este subspaţiu invariant al lui u. Considerăm $u_2 = u|V_2$ şi continuăm procedeul. La fiecare pas k se obţine un subspaţiu $V_k = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}^{\perp}$ invariant al lui u, cu proprietatea că $e_k \perp e_i$ pentru orice $1 \le i \le k-1$. Dimensiunea lui V_k este n - k (deoarece $V = V_k \oplus sp\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$). După n paşi se obţine o bază ortonormată a lui V formată din vectori proprii ai lui u. Conform Teoremei 3.7.1 u este diagonalizabil.

4. 6 Exerciţii

1. Se consideră spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^4$ dotat cu produsul scalar canonic. Să se determine vectorul $x \in \mathbf{R}^4$ de normă 1, care împreună cu vectorii $a = (1, 0, 1, -1)$ şi $b = (0, 1, 1, 1)$ formează un sistem ortogonal.

[*)] Subspaţiul $V_1 \subseteq V$ este invariant la $u \in L_K(V)$ dacă $u(V_1) \subseteq V_1$.

R: Dacă $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, atunci, impunând condiţiile cerute, $\|x\| = 1$, $< x, a > = 0$, $< x, b > = 0$, obţinem sistemul $x_1 + x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Primele două ecuaţii formează un sistem liniar şi omogen, compatibil nedeterminat, cu soluţiile $x_1 = - \alpha + \beta$, $x_2 = - \alpha - \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Înlocuind aceste soluţii în ultima ecuaţie a sistemului de mai sus, obţinem $3\alpha^2 + 3\beta^2 = 1$. Ecuaţiile parametrice ale componentelor x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sunt $x_1 = (1/\sqrt{3})(\cos\varphi - \sin\varphi)$, $x_2 = -(1/\sqrt{3})(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $x_3 = (1/\sqrt{3})\sin\varphi$, $x_4 = (1/\sqrt{3}\ 1/3)\cos\varphi$.

2. Să se demonstreze că aplicaţia $< . , . > : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $< z_1 , z_2 > = z_1 \overline{z_2}$ este un produs scalar în spaţiul vectorial complex **C**.

R: Se observă că $< z, z > = \|z\|^2 \geq 0$, iar $< z, z > = 0 \Leftrightarrow z = 0$. De asemenea $< z_1, z_2 > = \overline{< z_2, z_1 >}$ şi, cum liniaritatea în primul argument este un exerciţiu simplu pentru cititor, rezultă concluzia.

3. Să se arate că într-un spaţiu vectorial complex, dotat cu produs scalar, are loc identitatea $4< x, y > = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2$.

R: Avem $\|x + iy\|^2 = <x + i y, x + iy > = \|x\|^2 + i < y, x > - i < x, y > + \|y\|^2$ şi analog $\|x - iy\|^2 = \|x\|^2 - i < y, x > + i < x, y > + \|y\|^2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + <y, x > + < x, y > + \|y\|^2$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - <y, x > - < x, y > + \|y\|^2$. Folosind relaţiile de mai sus rezultă concluzia.

4. Să se verifice dacă aplicaţia $< . , .> : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$

$$< x , y > = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_1} + x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_2},$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbf{C}^2$, defineşte un produs scalar în spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^2$.

R: Avem $< x , x > = |x_1|^2 + 2 \operatorname{Re} x_1 \overline{x_2} + |x_2|^2$, unde am notat prin Re z partea reală a numărului complex z. Deoarece $|\operatorname{Re} x_1 \overline{x_2}| \le |x_1 \overline{x_2}| = |x_1| |x_2|$, este clar că $< x , x > \ge |x_1|^2 - 2 |x_1| |x_2| + |x_2|^2 = (|x_1| - |x_2|)^2 \ge 0$.

Dacă $< x , x > = 0$, atunci, din inegalitatea de mai sus, rezultă că $|x_1| = |x_2| = a$. Pe de altă parte, dacă scriem numerele complexe x_1 şi x_2 sub formă trigonometrică, avem $x_1 = a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $x_2 = a(\cos \tau + i \sin \tau)$, $\varphi, \tau \in [0, 2\pi)$ şi $2 \operatorname{Re} x_1 \overline{x_2} = 2a^2 \cos (\varphi - \tau)$. Atunci $< x , x > = 0 \Leftrightarrow 2a^2\cos (\varphi - \tau) = - 2a^2 \Leftrightarrow \varphi - \tau = \pi$. În cazul particular $\varphi = \pi$, $\tau = 0$, $a \ne 0$, avem $x = (-a, a) \ne 0_{\mathbf{C}^2}$ şi $< x, x> = 0$. Deci aplicația definită mai sus nu este un produs scalar pe $\mathbf{C}^2$.

5. Să se arate că aplicația $<.,.> : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, $<x, y> = 2x_1 \overline{y_1} + 3 x_2 \overline{y_2}$, unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbf{C}^2$, defineşte un produs scalar în spațiul vectorial complex $\mathbf{C}^2$.

Indicație: Se verifică axiomele produsului scalar în maniera prezentată la exercițiul precedent.

6. Folosind procedeul de ortonormare Gram Schmidt să se ortonormeze sistemele de vectori liniar independente de mai jos:

a) $\{e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (2, 1, -3), e_3 = (-1, 1, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^3$;

b) $\{e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (0, 1, 0, 1), e_3 = (1, -1, 0, 1), e_4 = (1, 1, 1, -1)\} \subseteq \mathbf{R}^4$;

c) $\{e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 0), e_3 = (3, 0, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^3$;

d) $\{e_1 = (2, 1), e_2 = (1, 1)\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

R: a) În prima etapă se construieşte un sistem ortogonal g_1, g_2, g_3. Conform procedeului Gram Schmidt, avem $g_1 = e_1$. Căutăm g_2 de forma $g_2 = e_2 + \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $< g_2, g_1 > = 0$. Obținem $\alpha = -< e_2, g_1 >/\|g_1\|^2$. Deci $\alpha = 1/2$ iar $g_2 = (5/2, 1,$

-5/2) . Alegerea lui g_3 se face astfel încât $g_3 = e_3 + \alpha g_1 + \beta\, g_2$ şi $< g_3, g_1 > = 0$, $< g_3, g_2 > = 0$. De aici rezultă $\alpha = - < e_3, g_1 >/\|g_1\|^2 = 1/2$, $\beta = -< e_3, g_2 >/\|g_2\|^2 = 1/9$ şi $g_3 = (-2/9, 10/9, 2/9)$. Sistemul $S = \{g_1/\|g_1\|, g_2/\|g_2\|, g_3/\|g_3\|\}$ este ortonormat. Deci $S = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (5\sqrt{6}/18, \sqrt{6}/18, -5\sqrt{6}/18), (-\sqrt{3}/9, 5\sqrt{3}/9, \sqrt{3}/9)\}$. Procedând asemănător se vor determina sistemele ortonormate în cazul punctelor b) - d). Astfel, în cazul punctului b) avem sistemul $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}), (2/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})\}$, pentru c) obţinem $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (0, 1/\sqrt{2}, - 1/\sqrt{2}), (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\}$, iar în cazul punctului d) avem sistemul ortonormat $\{(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$.

7. Fie V mulţimea $C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}, f \text{ continuă}\}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că V împreună cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire a acestora cu numere reale capătă o structură de spaţiu vectorial real.

b) Fie $\rho \in C^0([a, b])$ o funcţie fixată în V, $\rho(x) > 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. Să se arate că aplicaţia

$$< f, g >_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

defineşte un produs scalar pe V, numit produs scalar cu ponderea ρ.

Indicaţie: a) Se verifică axiomele spaţiului vectorial. b) Se verifică axiomele produsului scalar.

8. Fie V_1 subspaţiul vectorial al spaţiului $V = C^0((a, b))$, $- \infty \le a < b \le \infty$ format din toate polinoamele de orice grad cu nedeterminata x şi coeficienţi reali. Este uşor de văzut că dacă $\rho(x) \in V$, $\rho(x) > 0$ este o pondere adecvată (adică $\rho(x)$ este astfel încât integrala din formula de mai

jos este convergentă), atunci formula $< f, g >_\rho = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$ defineşte un produs scalar pe V_1. Să se ortogonalizeze sistemul $S = \{ f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = x^3\}$ folosind procedeul Gram Schmidt, dacă ponderea ρ şi valorile a şi b sunt cele de mai jos:

a) $a = -1, b = 1, \rho(x) = (1 - x^2)^2$;

b) $a = 0, b = \infty , \rho(x) = xe^{-x}$.

R: a) Alegem $g_1 = 1$. Construim $g_2 = f_2 + \alpha g_1$ astfel încât $< g_1, g_2 >_\rho = 0$. Avem $\alpha = -< f_2, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2$. Deoarece $< f_2, g_1 >_\rho = \int_{-1}^{1} x(1 - x^2)^2dx = 0$ rezultă că $g_2 = x$. Următorul vector g_3 din sistemul ortogonal va satisface condițiile $g_3 = f_3 + \alpha g_1 + \beta g_2$, $< g_1, g_3 >_\rho = 0$, $< g_2, g_3 >_\rho = 0$. Deci $\alpha = - < f_3, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2$, $\beta = - < f_3, g_2 >_\rho /\|g_2\|^2$. Avem $< f_3, g_1 >_\rho = \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)^2dx = 16/105$, $\|g_1\|^2 = < g_1, g_1 >_\rho = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2dx = 16/15$, $< f_3, g_2 >_\rho = \int_{-1}^{1} x^3(1 - x^2)^2dx = 0$ şi $\|g_2\|^2 = < g_2, g_2 >_\rho = \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)^2dx = 16/105$. Obținem $g_3 = x^2 - 1/7$. Analog $g_4 = f_4 + \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$, unde $\alpha = - < f_4, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2 = 0$, $\beta = - < f_4, g_2 >_\rho /\|g_2\|^2 = 1/3$, $\gamma = - < f_4, g_3 >_\rho /\|g_3\|^2 = 0$. Sistemul ortogonal căutat este $S' = \{ g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x^2 - 1/7, g_4 = x^3 - 1/3x\}$.

Polinoamele g_i, $i = 1, 2, 3, 4$ reprezintă primele 4 polinoame Jacobi corespunzătoare ponderii $\rho(x)$.

b) $g_1 = 1$; $g_2 = f_2 + \alpha g_1$ unde $\alpha = - < f_2, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2$, $< f_2, g_1 >_\rho = \int_0^\infty x^2e^{-x} dx = 2$, $\|g_1\|^2 = < g_1, g_1 >_\rho = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Deci $g_2 = x - 2$. Avem $g_3 = f_3 + \alpha g_1 + \beta g_2$ cu $\alpha = - < f_3, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2$, $\beta = - < f_3, g_2 >_\rho /\|g_2\|^2$, $< f_3, g_1 >_\rho = \int_0^\infty x^3e^{-x} dx = 6$, $< f_3, g_2 >_\rho = \int_0^\infty x^3 (x - 2)e^{-x} dx = 12$, $\|g_2\|^2 = \int_0^\infty x(x - 2)^2e^{-x} dx = 2$. Deci $g_3 = x^2 - 6(x - 2) - 6 = x^2$

- 6x + 6. Analog se stabileşte că $g_4 = f_4 + \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$, unde $\alpha = 24$, $\beta = -36$, $\gamma = -12$. Deci $g_4 = x^3 - 12x^2 + 36x - 24$. Polinoamele g_1, g_2, g_3, g_4 se numesc polinoame Laguerre şi formează sistemul ortogonal căutat.

9. Să se determine adjunctul operatorilor liniari de mai jos relativ la produsul scalar canonic:

a) $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y + z, x + z)$;

b) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f_2(x, y) = (x + y, x - 2y, x + 3y)$;

c) $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_3(x, y) = (x + 2y, x)$;

d) $f_4 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $f_4(x, y, z, t) = (x - y, y - z, z - t, t - x)$.

R: a) Matricea $A = (a_{ij})_{i, j = 1, 2, 3}$, asociată lui f_1 în baza canonică $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ a lui $\mathbf{R}^3$, este dată de relaţiile $u_1(e_i) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3$, i = 1, 2, 3. Deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Fie B matricea asociată lui f_1^* în baza canonică. Dacă $v, w \in \mathbf{R}^3$, atunci $u_1(v) = vA$, $f_1^*(w) = wB$, $< u_1(v), w> = vAw$ şi $<v, f_1^*(w)> = vB^Tw$. De aici şi din definiţia operatorului adjunct rezultă că $B = A^T$, adică matricea asociată lui f_1^* este A^T. Acum este clar că $f_1^*(x, y, z) = (x, y, z)A^T$.

Deci $f_1^*: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1^*(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y, - x + y + z)$.

b) $f_2^*: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f_2^*(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y + 3z)$;

c) $f_3^*: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_3^*(x, y) = (x + y , 2x)$;

d) $f_4^*: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $f_4^*(x, y, z, t) = (x - t, - x + y, - y + z, - z + t)$.

10. Se consideră spaţiul vectorial $\mathbf{R}_2[X]$ al tuturor polinoamelor, de grad cel mult 2, în nedeterminata x, dotat cu produsul vectorial definit la punctul a) al Exerciţiului 8. Să se determine adjunctul operatorului liniar $u : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$, $u(f) = 2f ' - 3f$, unde f \` este derivata polinomului f.

R: Se ştie că o bază a spaţiului $\mathbf{R}_2[X]$ este $\{1, x, x^2\}$. După cum am arătat deja în exerciţiul 8, o bază ortogonală a acestui spaţiu este $B' = \{ g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x^2 - 1/7\}$.

Ortonormăm această bază şi obținem baza B = { g_1 = 15/16, g_2 = 105/16 x, g_3 = 2205/16 (x^2 - 1/7)}.

În această bază operatorul *u* are matricea asociată A = $(a_{ij})_{i,\, j\, =\, 1,\, 2,\, 3,}$ unde $u(g_i) = a_{i1}g_1 + a_{i2}g_2 + a_{i3}g_3$, i = 1, 2, 3. Avem $u(g_1)$ = - 45/16, $u(g_2)$ = 105/16(2 - 3x), $u(g_3)$ = 2205/16 (- $3x^2$ + 2x + 3/7). Deci $a_{11} = < u(g_1), g_1 >_\rho$ = - 45/16, $a_{12} = < u(g_1), g_2 >_\rho = 0$, $a_{13} = < u(g_1), g_3 >_\rho = 0$, $a_{21} = < u(g_2), g_1 >_\rho$ = 105/8, $a_{22} = < u(g_2), g_2 >_\rho$ = -315/16, $a_{23} = < u(g_2), g_3 >_\rho = 0$, $a_{31} = < u(g_3), g_1 >_\rho = 0$, $a_{32} = < u(g_3), g_2 >_\rho$ = 2205/8, $a_{33} = < u(g_3), g_3 >_\rho$ = - 6615/4. Obținem A = $15/4\begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 0 \\ 7/2 & -21/4 & 0 \\ 0 & 147/2 & 441 \end{pmatrix}$. Deci matricea asociată operatorului adjunct u^* în aceeaşi bază va fi A^T.

Deoarece 1 = 16/105(7g_1), x = 16/105g_2 iar x^2 = 16/105(1/21g_3 + g_1), deducem că $u^*(ax^2 + bx + c)$ = 16/105[a/21g_3 + a g_1 + b g_2 + 7 c g_1] = 16/105[a/21 $u^*(g_3)$ + (a + 7c) $u^*(g_1)$ + b $u^*(g_2)$] = 4/7[a/21(441g_3) + (a + 7c) (-3/4g_1 + 7/2g_2) + b(-21/4g_2 + 147/2g_3)] = 6615/8(2a + 7b)(x^2 - 1/7) -45/112a - 45/16c + 105/16(2a - 3b + 14c)x . Deci $u^*(ax^2 + bx + c)$ = 6615/8(2a + 7b)(x^2 - 1/7) - 45/112a - 45/16c + 105/16(2a - 3b + 14c)x.

11. Să se verifice dacă operatorul f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, f(x, y, z) = ($1/\sqrt{2}$ x + $1/\sqrt{2}$ z, $5\sqrt{6}/18$x + $\sqrt{6}/18$y - $5\sqrt{6}/18$ z, -$\sqrt{3}/9$x + $5\sqrt{3}/9$y + $\sqrt{3}/9$z) este ortogonal.

R: Matricea asociată operatorului în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ este A = $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 5\sqrt{6}/18 & -\sqrt{3/9} \\ 0 & \sqrt{6}/18 & 5\sqrt{3/9} \\ 1/\sqrt{2} & -5\sqrt{6}/18 & \sqrt{3/9} \end{pmatrix}$. Deoarece $A^T = A^{-1}$ se deduce că într-adevăr operatorul *f* este ortogonal (vezi Propoziția 4.4.1).

CAPITOLUL 5

FORME BILINIARE ŞI PĂTRATICE

5.1 Forme biliniare

I. Definiţia formei biliniare. Matrice asociată.

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale R.

Definiţia 5.1.1 *O aplicaţie $B : V \times W \to R$ care îndeplineşte condiţiile de mai jos pentru orice x_1, $x_2 \in V$, y_1, $y_2 \in W$ α, $\beta \in \mathbf{R}$ se numeşte formă biliniară.*

a) $B(x_1 + x_2, y_1) = B(x_1, y_1) + B(x_2, y_1)$;

b) $B(\alpha x_1, y_1) = \alpha B(x_1, y_1)$;

c) $B(x_1, y_1 + y_2) = B(x_1, y_1) + B(x_1, y_2)$;

d) $B(x_1, \alpha y_1) = \alpha B(x_1, y_1)$.

Observaţia 5.1.1. 1) Condiţiile a), b), c) şi d) de mai sus sunt echivalente cu condiţiile

a)' $B(\alpha x_1 + \beta x_2, y_1) = \alpha B(x_1, y_1) + \beta B(x_2, y_1)$;

b') $B(x_1, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x_1, y_1) + \beta B(x_1, y_2)$;(Temă)

2) $B(0, y) = B(x, 0) = 0$ oricare ar fi $x \in V$, $y \in W$. Într-adevăr din definiţia de mai sus rezultă că pentru $x \in V$, fixat aplicaţia $y \to B(x, y)$ definită pe W cu valori reale este un operator liniar. De asemenea, dacă fixăm $y \in W$,

atunci aplicația $x \to B(x, y)$ definită pe V cu valori reale este tot un operator liniar. Din Observația 3.1.1 b) rezultă concluzia.

Exemplul 5.1.1. *Se consideră aplicațiile*

a) $B : R^3 \times R^4 \to R$, $B(x, y) = x_1y_1 - 3x_2y_2 + 2x_3y_2 + x_3y_4$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$;

b) $B : R^3 \times R^3 \to R$, $B(x, y) = x_1y_1 - x_2^2 y_2 + 3x_3y_3$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Să se verifice dacă aplicațiile de mai sus sunt forme biliniare.

Rezolvare: Se constată că sunt verificate condițiile a') și b') din Observația 5.1.1, deci B(.,.) este o formă biliniară. b) Fie $\alpha = 2$, $x_0 = (0, 1, 0)$, $y_0 = (0, 1, 1)$. Avem $B(\alpha x_0, y_0) = -4$ în timp ce $\alpha B(x_0, y_0) = -2$. Deoarece $B(\alpha x_0, y_0) \neq \alpha B(x_0, y)$, rezultă că nu este îndeplinită condiția b) din Definiția5.1.1 și B(.,.) nu este o formă biliniară.

Fie acum $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în V și $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ o bază în W. Dacă $x = \xi_1u_1 + \xi_2u_2 + \ldots + \xi_nu_n \in V$ și $y = \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_nw_n \in W$, atunci $B(x, y) = B(\xi_1u_1 + \xi_2u_2 + \ldots + \xi_nu_n, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_nw_n)$. Ținând cont de proprietățile a') și b') ale formei biliniare, avem succesiv $B(x, y) = \xi_1B(u_1, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_nw_n) + \xi_2B(u_2, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_nw_n) + \ldots + \xi_nB(u_n, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_nw_n) \Leftrightarrow$

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \xi_i\zeta_jB(u_i, w_j).$$

Notând $a_{ij} = B(u_i, w_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, obținem

(5.1.1) $$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \xi_i\zeta_j.$$

Definiția 5.1.2 *Matricea $A = (a_{ij})_{i = \overline{1,n},\, j = \overline{1,m}}$ definită mai sus se numește matricea asociată formei biliniare B(.,.) în perechea de*

baze B şi B_1 iar elementele a_{ij} se numesc coeficienţii formei biliniare în aceeaşi pereche de baze.

Observaţia 5.1.2. a) Expresia matricială a formulei (5.1.1) este

$$B(x, y) = \xi A \zeta^T,$$

unde ξ (respectiv ζ) este matricea linie $(\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n)$(respectiv $(\zeta_1\ \zeta_2 \ldots \zeta_m)$).

b) Dacă V = W, atunci se consideră aceeaşi bază $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ pentru V şi W, elementele matricei asociate formei biliniare fiind $a_{ij} = B(u_i, u_j)$, i, j = 1, 2,…,n.

Exemplul 5.1.2. *Se consideră forma biliniară definită în Exemplul 5.1.1. Să se determine matricea asociată acestei forme biliniare în perechea de baze $B = \{u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 3, 0), u_3 = (-2, 0, 0)\}$, în R^3, şi $B_1 = \{w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 2, 0), w_3 = (1, -1, 0, 0), w_4 = (3, 0, 0, 0)\}$, în R^4.*

Calculăm $a_{11} = B(u_1, w_1) = 1 - 3 + 4 + 2 = 4$, $a_{12} = B(u_1, w_2) = 1- 3 + 4 + 0 = 2$ etc. şi obţinem matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -8 & 10 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Observaţia 5.1.3. Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea matricelor $A \in M_{nxm}(\mathbf{R})$ şi mulţimea formelor biliniare definite pe VxW, unde $\dim_R V = n$ şi $\dim_R W = m$. Într- adevăr, dacă B(.,.) este o formă biliniară definită pe V x W şi (B, B_1) este o pereche de baze (B în V şi B_1 în W) fixată , atunci am văzut mai sus că formei biliniare B(.,.) i se asociază în mod unic o matrice $A \in M_{nxm}(\mathbf{R})$. Reciproc, dacă $A \in M_{nxm}(\mathbf{R})$ $A = (a_{ij})_{i = 1,n,\ j = 1,m}$, atunci definim aplicaţia $B : V \times W \to R$, $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \xi_i \zeta_j$, unde $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ şi respectiv $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ sunt

coordonatele vectorilor x şi respectiv y în bazele B şi B_1. Funcţia definită mai sus este o formă biliniară (exerciţiu).

Observaţia 5.1.4. Fie B : $R^n x R^m \to R$, $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, o formă biliniară. Dacă B şi respectiv B_1 sunt bazele canonice în $\mathbf{R}^n$ şi $\mathbf{R}^m$, atunci matricea asociată formei biliniare în perechea de baze aleasă este $A = (a_{ij})_{i = 1,n, j = 1,m}$, adică elementul a_{ij} al matricei A este de fapt coeficientul lui $x_i y_j$ din expresia formei biliniare.

Exemplul 5.1.3. *Matricea asociată formei biliniare de la exemplul precedent în perechea formată din bazele canonice din* $\boldsymbol{R}^3$ *şi respectiv* $\boldsymbol{R}^4$ *este* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II. Schimbarea matricei asociate când se schimbă bazele

Ca şi în cazul operatorilor liniari, se pune problema determinării legăturii între matricele asociate formei biliniare în perechi de baze diferite. Astfel, avem teorema de mai jos:

Teorema 5.1.1 *Dacă* $A = (a_{ij})_{i = 1,n,\ j = 1,m}$ *şi* $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i = 1,n,\ j = 1,m}$ *sunt matricele asociate formei biliniare B(.,.) în perechile de baze (B, B'), (B_1, B_1'), diferite şi M, respectiv P sunt matricele de trecere de la baza B la baza B_1 în V şi respectiv de la baza B' la baza B_1' în W, atunci*

$$\Lambda = M\, A\, P^T. \tag{5.1.2}$$

Demonstraţie. Fie B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, B' $=\{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ baze în V şi $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, $B_1' = \{w_1', w_2', \ldots, w_m'\}$ baze în W.

Conform definiţiei matricei asociate unei forma biliniare B(.,.), avem $\lambda_{ij} = B(u_i', w_j') = B(m_{i1}u_1 + \ldots + m_{in}u_n, p_{j1}w_1 + \ldots + p_{jm}w_m)$. Folosind proprietăţile a) - d) din Definiţia 5.1.1 obţinem

$$\lambda_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ir}p_{jk}B(u_r, w_k) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ir}a_{rk}p_{jk}.$$

Deci λ_{ij} este elementul de pe linia *i* şi coloana *j* a matricei M A P^T. Demonstraţia este completă.

Exemplul 5.1.4 *Să se rezolve problema de la Exemplul 5.1.2 folosind formula (5.1.2).*

Este cunoscută matricea A asociată formei biliniare B(.,.) în perechea de baze canonice ale spaţiilor pe care aceasta este definită (vezi Exemplul 5.1.3). Pentru a determina matricea asociată formei în perechea formată din bazele de la Exemplul 5.1.2, este suficient să determinăm matricele care dau schimbările de baze în spaţiile $\mathbf{R}^3$ *şi* $\mathbf{R}^4$*. Astfel, conform definiţiei matricei de trecere, şi respectând notaţiile din Teorema 5.1.1 avem* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *şi* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicăm formula (5.1.2) şi avem $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -8 & 10 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Observaţia 5.1.5 Dacă V = W şi M este matricea schimbării de bază în spaţiul V atunci formula (5.1.2) devine

$$\Lambda = M\ A\ M^T.$$

III. Forme biliniare simetrice.

Definiția 5.1.3 *Spunem că forma biliniară B(.,.) definită pe $V \times V$ este o formă biliniară simetrică dacă B(x, y) = B(y, x).*

Observația 5.1.6 Dacă *B*(.,.) este o formă biliniară simetrică definită pe $V \times V$ şi B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în V, atunci $a_{ij} = B(u_i, u_j) = B(u_j, u_i) = a_{ji}$ oricare ar fi i, j = 1,..n. Deci matricea asociată formei biliniare *B*(.,.) într-o bază oarecare B a spațiului este simetrică. Din Observația 5.1.3 rezultă că este adevărată şi afirmația reciprocă, adică dacă matricea asociată formei biliniare B(.,.) într-o bază a spațiului V este simetrică, atunci forma biliniară este simetrică.

Exemplul 5.1.5 *Să se verifice dacă aplicațiile de mai jos sunt forme biliniare simetrice:*

a) *B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + 3x_2y_2 - 4x_3y_3$, *unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$;

b) *B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + 3x_2y_2 + 3\,x_2y_1 - x_3y_1 - 4x_3y_3$;

c) *B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + 3x_2y_2 + 3y_1x_2 - y_1x_3 - 4x_3y_3 + 1$.

Fie B = $\{E_1, E_2, E_3\}$, baza canonică în $\boldsymbol{R}^3$. a) Deoarece $B(E_1,E_2) = 3$ iar $B(E_2, E_1) = 0$ şi $B(E_1,E_2) \neq B(E_2, E_1)$, rezultă, conform definiției de mai sus, că B(.,.) nu poate fi o formă biliniară simetrică.

b) Aplicația B(.,.) este o formă biliniară (Exercițiu). Matricea asociată formei în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *şi, deoarece este*

simetrică, deducem, conform observaţiei de mai sus, că forma biliniară este simetrică.

d) Aplicaţia nu este formă biliniară deoarece 3 = $B(2E_1,E_1) \neq 2B(E_1,E_1) = 4$ *şi nu avem satisfăcută condiţia de omogeneitate în primul argument.*

Exemplul 5.1.6 *Să se determine forma biliniară simetrică definită pe* $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$*, a cărei matrice asociată în baza* $B = \{u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, -3, 0), u_3 = (3, 0, 0)\}$ *este* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Să se găsească expresia formei biliniare în baza B, respectiv în baza canonică a lui* $\boldsymbol{R}^3$.

Dacă $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$, $y = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3 \in \boldsymbol{R}^3$, *atunci se ştie că* $B(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,\xi_i\zeta_j$. *Expresia formei biliniare în baza B este* $B(x,y) = \xi_1\zeta_1 - 2\xi_1\zeta_2 - 2\xi_2\zeta_1 + 3\xi_2\zeta_2$. *Deoarece matricea M de trecere de la baza B la baza canonică este dată de formula* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *aplicăm formula (5.1.2) pentru a determina matricea* Λ *asociată formei biliniare simetrice în baza canonică şi obţinem* $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$. *Dacă* $x = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$, $y = y_1E_1 + y_2E_2 + y_3E_3 \in \boldsymbol{R}^3$, *unde* E_1, E_3, E_3 *sunt vectorii bazei canonice, atunci* $B(x, y) = 1/3\, x_2y_2 + 1/2 x_2y_3 + 1/2\, x_3y_2 + 2/3\, x_3y_3$.

Definiţia 5.1.4 *Spunem că forma biliniară simetrică B(.,.) definită pe* $V \times V$ *este pozitiv definită dacă* $B(x, x) > 0$, *oricare ar fi x*

$\in V$, $x \neq 0$. Forma este negativ definită dacă $B(x, x) < 0$, oricare ar fi $x \in V$, $x \neq 0$.

Definiția 5.1.5 *Forma biliniară simetrică $B(.,.)$ definită pe $V \times V$ este pozitiv (respectiv negativ) semidefinită dacă $B(x, x) \geq 0$, (respectiv $B(x, x) \leq 0$) oricare ar fi $x \in V$ şi există $x \neq 0$ astfel încât $B(x, x) = 0$.*

Definiția 5.1.6 *Dacă forma biliniară simetrică $B(.,.)$ definită pe $V \times V$ nu este nici pozitiv, nici negativ semidefinită atunci spunem că este nedefinită.*

Exemplul 5.1.7 *Forma biliniară simetrică B: $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ este pozitiv definită deoarece $B(x, x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0$ şi $B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$. În acelaşi mod se verifică faptul că forma biliniară simetrică B: $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = - x_1y_1 - 2x_2y_2 - 4x_3y_3$ este negativ definită. Dacă vom considera forma biliniară simetrică B: $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 - 3x_2y_2 + 4x_3y_3$ se constată că $B((1,0,1),(1,0,1)) = 5 > 0$, în timp ce $B((0,1,0),(0,1,0)) = -3 < 0$. În acest caz forma nu este nici pozitiv, nici negativ semidefinită, ci este nedefinită.*

5. 2 Forme pătratice. Reducerea la forma canonică

I. Forme pătratice. Definiție. Proprietăți. Matrice asociată.

Fie $B : V \times V \to \mathbf{R}$, o formă biliniară simetrică, unde V este un spațiu vectorial real.

Definiţia 5.2.1 *Aplicaţia A: $V \to R$, definită de formula $A(x) = B(x, x)$ se numeşte forma pătratică asociată formei biliniare simetrice $B(.,.)$. Forma biliniară $B(.,.)$ se numeşte forma polară a formei pătratice A.*

Propoziţia 5.2.1 *Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea formelor pătratice definite pe spaţiul vectorial V şi mulţimea formelor biliniare simetrice definite pe $V \times V$.*

Demonstraţie. Faptul că fiecărei forme biliniare simetrice $B(.,.)$ i se asociază în mod unic o formă pătratică, rezultă din definiţia de mai sus. Pentru a demonstra afirmaţia reciprocă, vom demonstra mai întâi că între o formă biliniară simetrică şi forma pătratică asociată există relaţia

$$B(x, y) = \frac{1}{2}[A(x + y) - A(x) - A(y)]. \tag{5.2.1}$$

Într- adevăr, $A(x + y) = B(x + y, x + y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y) = A(x) + 2B(x, y) + A(y)$ şi, de aici, rezultă concluzia. Deci fiecărei forme pătratice i se poate asocia o formă biliniară.

Exemplul 5.2.1 *a) Să se determine forma pătratică asociată formei biliniare simetrice B: $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 + 4x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. b) Dacă A: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $A(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 -2x_1x_3 + x_3^2$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ este o formă pătratică, să se determine forma sa polară.*

R: a) $A(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2$. b) Forma polară este $B(x,y) = \frac{1}{2}[A(x + y) - A(x) - A(y)] = x_1y_1 + 3/2x_1y_2 - x_1y_3 + 3/2x_2y_1 - x_3y_1 + x_3y_3$, conform relaţiei (5.2.1).

Definiția 5.2.2 *Forma pătratică A: V $\to$ **R** este pozitiv definită (respectiv negativ definită) dacă forma sa polară este pozitiv definită (respectiv negativ definită). Analog se definesc noțiunile de formă pătratică pozitiv semidefinită (respectiv negativ semidefinită) sau de formă pătratică nedefinită.*

Observația 5.2.1 Definiția de mai sus poate fi reformulată astfel: "Forma pătratică A este:

- pozitiv (negativ) definită $\Leftrightarrow$ A(x) > 0,(A(x) < 0) $x\in V$, $x \neq 0$;

- pozitiv (negativ) semidefinită $\Leftrightarrow$ A(x) $\geq$ 0,(A(x) $\leq$ 0) $x\in V$ şi există $x \in V$, $x \neq 0$ astfel încât A(x) = 0.

- nedefinită dacă ia atât valori pozitive cât şi valori negative."

Ca şi în cazul formelor biliniare simetrice, se pune problema asocierii la fiecare formă pătratică A: V $\to$ **R** a unei matrice într-o bază B a spațiului vectorial real V.

Definiția 5.2.3 *Se numeşte matrice asociată formei pătratice A: V $\to$ **R** în baza B a spațiului V, matricea asociată formei sale polare în aceeaşi bază.*

Dacă B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în V şi *B*(.,.) este forma polară a formei pătratice A(.) şi $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n \in V$, atunci A(x) = B(x, x) = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i \xi_j$, conform relației (5.1.1). Expresia de mai sus se scrie matricial astfel

(5.2.2) $$A(x) = \xi A \xi^T,$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j = 1,..,n}$ şi ξ este matricea linie $(\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_n)$.

Relaţia (5.2.2) poate fi folosită pentru a calcula mai uşor forma polară a unei forme pătratice. Astfel, deoarece $a_{ij} = a_{ji}$ oricare ar fi i, j = 1,..,n, avem

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\xi_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}\,\xi_i\xi_j. \tag{5.2.3}$$

Facem următoarea observaţie utilă:

- elementele a_{ii}, i = 1,..,n, de pe diagonala matricei asociate formei polare sunt chiar coeficienţii termenilor ce conţin ξ_i^2 din formula formei pătratice;

- elementele a_{ij} i, j = 1,..,n, i < j, de sub diagonala matricei asociate, sunt egale cu 1/2 din coeficienţii termenilor ce conţin $\xi_i\xi_j$, i < j.

- elementele de deasupra diagonalei matricei asociate sunt egale cu cele de sub diagonală deoarece matricea asociată este simetrică: $a_{ij} = a_{ji}$ i, j = 1,..,n.

Exemplul 5.2.2 *Dacă $A: \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$, $A(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_2x_5 + x_4x_5$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ este o formă pătratică, să se determine forma sa polară.*

Matricea asociată formei pătratice în baza canonică a lui $\mathbf{R}^5$ este

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & -1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 2 & 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci forma biliniară simetrică B(.,.), a cărei matrice asociată în baza canonică este cea de mai sus, este

$$B(x, y) = 3x_1y_1 + 3/2x_1y_2 - x_1y_3\ 3/2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 -1/2x_2y_5 - x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + 1/2x_4y_5 - 1/2x_5y_2 + 1/2x_5y_4.$$

II. Reducerea la forma canonică a unei forme pătratice

Definiția 5.2.4 *Se numeşte formă canonică a unei formei pătratice A: V → **R**, unde V este un spațiu de dimensiune n, orice scriere a acesteia într-o bază* B *a lui V de forma*

(5.2.4) $$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \xi_i^2, \text{ unde } \xi_i,\ i = 1,\dots, n$$

sunt coordonatele vectorului x în baza B.

O întrebare firească, pe care ne-o punem în legătură cu de definiția de mai sus, este următoare: Dată fiind o formă pătratică A definită pe V, există totdeauna o bază B a spațiului V astfel încât, în această bază, expresia formei pătratice să fie cea canonică (adică cea dată de relația (5.2.4))? Transpusă în limbaj matriceal, întrebarea poate fi reformulată astfel: Există totdeauna o matrice diagonală D = diag($\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$)[*)] asemenea cu matricea simetrică asociată formei pătratice A într-o bază oarecare a spațiului V?.

Aşa cum se va vedea mai jos, în cazul în care V este spațiu vectorial euclidian, răspunsul la aceste întrebări este pozitiv.

[*)] Convenim să folosim notația diag($\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$) pentru matricea de ordinul n care are pe diagonală scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ celelalte elemente fiind egale cu 0.

A. Metoda vectorilor şi valorilor proprii

Bazându-ne pe rezultatele stabilite în secţiunea dedicată operatorilor autoadjuncţi, putem demonstra teorema de mai jos.

Teorema 5.2.1 *Dacă V este un spaţiu euclidian real de dimensiune n şi A : V → R este o formă pătratică, atunci există o bază ortonormată în V pentru care matricea asociată formei pătratice este diagonală.*

Demonstraţie. Considerăm $B = \{e_1, e_2,\ldots,e_n\}$ o bază ortonormată în V. Matricea $\mathcal{A}$ asociată formei pătratice în această bază este simetrică.

Considerăm operatorul liniar $f : V \to V$ a cărui matrice asociată în baza B este chiar matricea $\mathcal{A}$. Deoarece matricea $\mathcal{A}$ este simetrică rezultă că operatorul liniar f este autoadjunct (exerciţiu).

În această situaţie, se cunoaşte faptul că există o altă bază ortonormată $B'= \{f_1, f_2,\ldots,f_n\}$ în care matricea D asociată lui f are forma diagonală $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ (vezi Teorema 4.5.3.).

Dacă M este matricea de trecere de la baza B la baza B' atunci avem următoarea relaţie între matricele D şi $\mathcal{A}$: $D = M\mathcal{A}M^{-1}$. Deoarece $f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_j$, oricare ar fi $i = 1,\ldots,n$, şi B' este bază ortonormată rezultă că

$$\delta_i^k = \langle f_i, f_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}m_{kj}\ ,\ i, k = 1,\ldots,n.$$

Ultima relaţie se scrie matricial $MM^T = I$. Deci $M^{-1} = M^T$*). Atunci relaţia dintre matricele D şi A devine $D = MAM^T$. Din Teorema 5.1.1 se

*) O matrice care îndeplineşte această condiţie va fi numită matrice ortogonală .

deduce că D este de fapt matricea asociată formei biliniare polare a formei pătratice A în baza B'. În concluzie, forma pătratică A este în formă canonică în baza B'.

Teorema demonstrată mai sus ne asigură că, în spaţii vectoriale euclidiene, orice formă pătratică poate fi adusă la forma canonică.

Pentru a determina efectiv baza ortonormată B',în care forma pătratică are forma canonică, facem trimitere la demonstraţia Teoremei 4.5.3.care arată că baza B' este formată din vectorii proprii de normă 1 ai matricei $\mathcal{A}$, iar elementele de pe diagonala principală a matricei D sunt valorile proprii ale matricei $\mathcal{A}$.

Din acest motiv metoda de reducere la forma canonică a unei forme pătratice bazată pe teorema de mai sus se numeşte *metoda vectorilor şi valorilor proprii* sau *metoda transformărilor ortogonale.*

Exemplul 5.2.3 *Să se aducă la forma canonică forma pătratică A:* $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $A(x) = 3\, x_1^2 + 2\, x_2^2 + 2\, x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2 x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Se observă că matricea asociată formei pătratice în baza canonică este

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrice sunt soluţiile ecuaţiei $\det(A-\lambda I) = 0$. *Rezolvând această ecuaţie obţinem* $\lambda_1 = \sqrt{3}+2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Pentru a găsi vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ_i , $i = 1, 2, 3$ *se rezolvă ecuaţia vectorială* $\mathcal{A}\, x^T = \lambda_i x^T$, *unde* $x^T = (x_1\ x_2\ x_3)$. *Pentru* $\lambda_1 = \sqrt{3}+2$ *obţinem sistemul compatibil, simplu nedeterminat*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = x_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = x_3 \end{cases}$$ *. Mulţimea soluţiilor acestui sistem este*

V_{λ_1} *={α(-$\sqrt{3}$ - 1, -1, 1),$\alpha \in R$}. Deci un vector propriu de normă 1 corespunzător valorii proprii λ_1 =1 este v_1 = $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}}, \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}}, -\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}}\right)$. În mod asemănător se obţine un vector propriu v_2 =$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ de normă 1 pentru valoarea proprie λ_2 = 3. Pentru λ_3 = -$\sqrt{3}$+2 avem v_3 =$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}}, -\frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}}, \frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}}\right)$. Baza ortonormată B' căutată este formată din vectorii v_1, v_2, v_3. Matricea M de trecere de la baza canonică (în care forma biliniară are asociată matricea $\mathcal{A}$) la baza B' este*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}} & \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}} & -\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}} & -\frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}} & \frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}} \end{pmatrix}.$$

Aplicând formula (5.1.2) rezultă că, în baza B', matricea asociată formei pătratice este D = $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Dacă ξ_i, i = 1, 2, 3 sunt coordonatele vectorului x în baza B', atunci expresia formei pătratice în această bază este A(x) = ($\sqrt{3}$+2)ξ_1^2 + 3ξ_2^2 + (2 - $\sqrt{3}$)ξ_3^2.

Legătura între coordonatele din baza B şi cele din baza B' fiind dată de formula $\xi^T = M^T x^T$ (căci am ţinut cont de faptul că M este matrice ortogonală). Deci

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{12}}}x_3$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3$$

$$\xi_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{12}}}x_3.$$

B. Metoda lui Gauss

Teorema următoare ne asigură de existența formei canonice a unei forme pătratice în cazul mai general în care, eliminând ipoteza ca spațiul V este dotat cu produs scalar, presupunem doar că V este un spațiu vectorial real.

Facem observația că această teoremă poate fi extinsă şi la cazul unui spațiu vectorial peste un corp oarecare, dacă admitem că forma pătratică şi respectiv forma sa polară iau valori într-un corp comutativ K oarecare.

Teorema 5.2.2 *Dacă V este un spațiu vectorial real de dimensiune* n *şi A : V* $\to$ ***R*** *este o formă pătratică care nu este identic nulă, atunci există o bază B în V pentru care matricea asociată formei pătratice este diagonală.*

Demonstrație. Fie B = $\{u_1, u_2,\ldots,u_n\}$ o bază a spațiului vectorial V şi fie $A = (a_{ij})_{i,j = 1,n}$ matricea asociată formei în această bază.

Dacă $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n \in V$ atunci $A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}$ x_ix_j, conform formulei (6.3.3). Deoarece A(.) nu este identic nulă, există cel puţin un coeficient $a_{ij} \neq 0$. Deosebim două cazuri:

a) Există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea $a_{ii} \neq 0$. În acest caz, folosind proprietatea de asociativitate a adunării vectorilor,

a1) se grupează toţi termenii ce conţin scalarul x_i astfel:

$$A(x) = a_{ij}\, x_i^2 + 2a_{i1}\, x_ix_1 + 2a_{i2}\, x_ix_2 + \ldots + 2a_{ii-1}\, x_ix_{i-1} + 2a_{ii+1}\, x_ix_{i+1} + \ldots$$

$$+2a_{in}\, x_ix_n + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2\sum_{\substack{k,j=1\\ k<j,k\neq i,j\neq i}}^{n} a_{kj}\, x_kx_j.$$

Dacă notăm $R(x) = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2\sum_{\substack{k,j=1\\ k<j,k\neq i,j\neq i}}^{n} a_{kj}\, x_kx_j$, atunci se observă că această aplicaţie este tot o formă pătratică, care nu mai depinde de x_i.

Mai mult, dacă se consideră restricţia R_i *) a acestei forme, la subspaţiul lui V generat de familia B - $\{e_i\}$, atunci R_i este o formă pătratică (exerciţiu) definită pe un spaţiu de dimensiune n-1.

$$\text{Obţinem } A(x) = a_{ii}\,[x_i^2 + 2x_i\,(\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} + \ldots +$$

$$\frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n)] + R_i(x).$$

a2) se formează un pătrat perfect folosind toţi termenii ce conţin x_i şi avem succesiv:

$$A(x) = a_{ii}\,(x_i + \frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n)^2 -$$

*) $R_i : V_i \to R$, $R_i(x) = R(x)$, unde am notat cu V_i subspaţiul lui V generat de B - $\{e_i\}$.

$(\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n)^2 + R_i(x)$ şi

$A(x) = a_{ii}(x_i + \frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n)^2$ -

$+ R_{i,1}(x)$, unde $R_{i,1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1}$

$+ \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n)^2 + R_i(x)$ este o nouă formă pătratică definită pe V_i.

a3) Se face schimbarea de coordonate

$\zeta_1 = x_1$

$\zeta_{i-1} = x_{i-1}$,

$\zeta_i = \frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} + x_i + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n$,

$\zeta_{i+1} = x_{i+1}$,

$\zeta_n = x_n$.

Matricea M_1 de trecere de la baza B la baza B', în care vectorul x are coordonatele de mai sus, se poate obține din relația

$$(M_1^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a_{i1}}{a_{ii}} & \ldots & \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}} & 1 & \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}} & \ldots & \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

În baza B', forma pătratică A se va scrie $A(x) = a_{ii}\zeta_i^2 + R_{i,1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n)$.

Dacă forma pătratică $R_{i,1}(.)$ este în formă canonică, atunci am obținut forma canonică pentru forma A(.), baza căutată fiind B'.

Dacă $R_{i,1}(.)$ nu este în formă canonică, atunci algoritmul continuă cu aducerea la forma canonică a acestei forme pătratice, respectiv cu pasul a1) dacă suntem în condiţiile cazului a) sau cu pasul b1) dacă suntem în cazul b), ce va fi expus în continuare.

În cazul în care este necesară aducerea la forma canonică a formei pătratice $R_{i,1}(.)$, noua schimbare de coordonate, fiind efectuată pentru subspaţiul V_i, nu va afecta coordonata ζ_i, care suferă doar o redenumire. Se va constata că, la fiecare aplicare a paşilor b1) şi a1) -a3), respectiv a1) - a3), dimensiunea spaţiului pe care este definită forma pătratică, ce trebuie adusă la forma canonică, scade cu cel puţin o unitate. Deci, într-un număr finit de paşi, algoritmul se încheie cu obţinerea formei canonice a formei pătratice A(.).

Dacă M_1, M_2, …M_k sunt matricele de schimbarea a coordonatelor obţinute la paşii P_1, …, P_k atunci matricea de schimbare a coordonatelor $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ în coordonatele finale $(\tau_1,\dots, \tau_n)$ este $M = M_kM_{k-1}..M_1$ iar matricea de trecere de la baza B la baza în care forma pătratică este în formă canonică este $(M^T)^{-1}$.

b) Nu există nici un indice $i \in \{1, 2, \dots,n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$. Atunci există indicii $i, j \in \{1, 2, \dots,n\}$, $i \neq j$, pentru care $a_{ij} \neq 0$.

b1) Se face schimbarea de coordonate $x_k = \zeta_k$, pentru $k \neq i, j$ şi

$$\zeta_i = 1/2(x_i + x_j),$$

$$\zeta_j = 1/2(x_i - x_j).$$

Matricea schimbării de coordonate este

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & .1. & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de la baza B la noua bază B' este $(M_1^T)^{-1}$. Expresia formei pătratice în baza B' este $A(x) = 2a_{ij}(\zeta_i^2 - \zeta_j^2) + \ldots$ şi este clar faptul că dacă în acest moment nu am obţinut deja forma canonică, putem continua cu aplicarea cazului a). Demonstraţia este completă.

Exemplul 5.2.4 *Să se determine forma canonică a formei pătratice A:* $\boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}$, $A(x) = -3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Deoarece $a_{11} = -3 \neq 0$, *suntem în cazul a) din demonstraţia teoremei de mai sus. Conform pasului a1), avem*

$A(x) = -3[x_1^2 + 2x_1(-1/2x_2 + 1/3x_3)] + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5.$

Completând pătratul perfect de la punctul a2) avem

$$A(x) = -3(x_1 - 1/2x_2 + 1/3x_3)^2 + 3(-1/2x_2 + 1/3x_3)^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2\, x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5 \quad \textit{sau}$$

$A(x) = -3(x_1 - 1/2x_2 + 1/3x_3)^2 - 2/3\, x_3^2 + 11/4x_2^2 + x_4^2 + x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5.$

Facem schimbarea de coordonate

(5.2.5) $\qquad y_1 = x_1 - 1/2x_2 + 1/3x_3,\ y_i = x_i,\ i = 2, 3, 4, 5$

şi obţinem $A(x) = -3y_1^2 + R_1(y_2, y_3, y_4, y_5) = -3y_1^2 - 2/3\, y_3^2 + 11/4y_2^2 + y_4^2 + y_2 y_3 - y_2y_5 + y_4y_5$. *Procedeul continuă cu reducerea la forma canonică a formei pătratice* $R_1(.)$. *Avem* $R_1(y_2, y_3, y_4, y_5) = y_4^2 + 2y_4(1/2y_5) - 2/3\, y_3^2 +$

$11/4y_2^2 + \ y_2\, y_3 - y_2y_5 = (y_4 + 1/2y_5)^2 - 1/4y_5^2 - 2/3\ y_3^2 + 11/4y_2^2 + y_2\, y_3 - y_2y_5$ *şi făcând o nouă schimbare de coordonate*

(5.2.6) $\qquad z_4 = y_4 + 1/2y_5,\ z_i = y_i,\ i = 1, 2, 3, 5$ *obţinem*

$R_1(y_2, y_3, y_4, y_5) = z_4^2 - 1/4z_5^2 - 2/3\ z_3^2 + 11/4z_2^2 + z_2\, z_3 - z_2z_5 = z_4^2 + R_2(z_2, z_3, z_5)$. *Grupând termenii ce conţin* z_5 *avem*

$R_2(z_2, z_3, z_5) = -1/4(z_5^2 + 2\ z_5 2\ z_2) - 2/3\ z_3^2 + 11/4z_2^2 + z_2\, z_3 = -1/4(z_5 + 2\ z_2) + 15/4z_2^2\ \ -2/3\ z_3^2 + z_2\, z_3$.*Facem schimbarea de coordonate*

(5.2.7) $\qquad t_5 = z_5 + 2\ z_2,\ t_i = z_i,\ i = 1, 2, 3, 4$

şi obţinem $R_2(z_2, z_3, z_5) = -1/4t_5^2 + 15/4t_2^2\ \ -2/3\ t_3^2 + t_2\, t_3 = -1/4t_5^2 + R_3(t_2, t_3)$. *În continuare observăm că* $R_3(t_2, t_3) = 15/4[\ t_2^2 + 2t_2(2/15\ \ t_3)]\ -2/3\ t_3^2 = 15/4\ (t_2 + 2/15\ \ t_3)^2 - 11/15t_3^2$ *şi, făcând o ultimă schimbare de coordonate, avem*

(5.2.8) $\qquad \zeta_2 = t_2 + 2/15\ \ t_3,\ \zeta_i = t_i,\ i = 1, 3, 4, 5.$

Acum este clar că $R_3(t_2, t_3) = 15/4\zeta_2^2 - 11/15\zeta_3^2$ *este în formă canonică. Ţinând cont de cele spuse până acum, deducem că forma canonică a formei pătratice A(.) este* $A(x) = -3\zeta_1^2 + 15/4\zeta_2^2 - 11/15\zeta_3^2 + \zeta_4^2\ - 1/4\zeta_5^2$. *Din relaţiile (5.2.5) - (5.2.8) rezultă următoarele formule de schimbare a coordonatelor, de la cele iniţiale la cele finale:*

$$\zeta_1 = x_1 - 1/2x_2 + 1/3x_3$$
$$\zeta_2 = x_2 + 2/15\ \ x_3$$
$$\zeta_3 = x_3$$
$$\zeta_4 = x_4 + 1/2\ x_5$$
$$\zeta_5 = x_5 + 2\ x_2.$$

Matricea de trecere de la baza canonică, în care este exprimată iniţial forma pătratică, la baza B' în care are forma canonică este

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -7/12 & -1/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

iar B' = {(1, 0, 0, 0, 0), (1/2, 1, 0, 1, -2), (-2/5, -2/15, 1, -2/15, 4/5), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, -1/2, 1)}.

Exemplul 5.2.5 *a) Să se determine forma canonică a formei pătratice A :* $R^3 \to R$, $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Cum toţi coeficienţii a_{ii} $i = 1,2,3$ *sunt nuli, suntem în cazul b) din demonstraţia teoremei precedente.*

Deoarece coeficientul $a_{12} = 1 \neq 0$, *facem schimbarea de coordonate*

$$y_1 = 1/2(x_1 + x_2),\ y_2 = 1/2(x_1 - x_2),\ y_3 = x_3$$

şi forma pătratică A devine

$$A(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + y_1y_3 - 3y_2y_3.$$

Acum putem aplica algoritmul de la punctul b) al aceleiaşi teoreme. Avem $A(x_1, x_2, x_3) = 2[y_1^2 + 2y_1(1/4\, y_3)] - 2y_2^2 - 3y_2y_3 =$ $2(y_1 + 1/4\, y_3)^2 - 2y_2^2 - 1/8y_3^2 - 3y_2y_3$ *şi facem o nouă schimbare de variabilă*

$$z_1 = y_1 + 1/4\, y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3.$$

Obţinem $A(x) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 1/8z_3^2 - 3z_2z_3 = 2z_1^2 + R(z_2, z_3)$.

Deoarece $R(z_2, z_3) = -2[z_2^2 + 2z_2(3/4\, z_3)]^2\ \ 1/8z_3^2 = -2(z_2 + 3/4z_3)^2 + z_3^2$, *facem schimbarea de variabile*

$$t_2 = z_2 + 3/4z_3,\ t_1 = z_1,\ t_3 = z_3$$

şi obţinem forma canonică a lui A(.): $A(x) = 2t_1^2 - 2t_2^2 + t_3^2$.

Relaţia între coordonatele x_1, x_2, x_3 *şi* t_1, t_2, t_3 *este*

$t_1 = 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/4x_3$

$t_2 = 1/2x_1 - 1/2x_2 + 3/4x_3$

$t_3 = x_3,$

Deci matricea de trecere de la baza canonică la baza B', în care forma pătratică este în formă canonică, este

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

iar B' = {(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 1/2, 1)}.

B. Metoda lui Jacobi de aducere la forma canonică a unei forme pătratice

Fie A(.) : V $\rightarrow$ R o formă pătratică care are expresia

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

într-o bază B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$($x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$). Atunci avem următoarea teoremă de aducere la forma canonică a formei pătratice A, :

Teorema 5.2.3 *(Teorema lui Jacobi) Dacă coeficienţii a_{ij}, i,j =1,…,n din expresia de mai sus a formei pătratice A(.) au proprietatea că şirul de determinanţi:* $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, …, $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$, …, Δ_n

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ *are toți termenii diferiți de zero,*

atunci există o bază $B' = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ în care $A(.)$ are forma canonică

(5.2.9) $A(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \xi_i^2$, *unde* ξ_i, $i = 1, \dots, n$ *sunt coordonatele vectorului x în baza B' iar* $\beta_1 = \Delta_0/\Delta_1$, $\beta_2 = \Delta_1/\Delta_2$, …, $\beta_n = \Delta_{n-1}/\Delta_n$.

Demonstrație. Fie $B(.,.)$ forma polară a formei pătratice A(.). Vom determina baza B' astfel încât

$$\begin{aligned} &g_1 = b_{11}u_1; \\ &g_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2; \qquad (5.2.10)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &g_n = b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nn}u_n \end{aligned}$$

şi să avem îndeplinite condițiile

(5.2.11) $B(g_i, g_j) = 0$, oricare ar fi $i \neq j$ şi

(5.2.12) $B(e_i, g_i) = 1$, $i = 1,\dots,n$.

Este evident că, dacă există o astfel de bază B', atunci forma pătratică A(.) este în formă canonică, adică $A(x) = b_{11}\, \xi_1^{\,2} + b_{22}\, \xi_2^{\,2} + \dots + b_{nn}\, \xi_n^{\,2}$, unde $\xi_1, \dots, \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza B'.

Pentru a completa demonstrația teoremei este suficient să arătăm că există scalarii b_{ij}, $1 \le i \le j \le n$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile (5.2.10) - (5.2.12), şi să demonstrăm că $b_{ii} = \Delta_{i-1}/\Delta_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

O observaţie imediată este aceea că $b_{ii} \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Într-adevăr, este uşor de văzut că determinantul matricei de trecere de la baza B la baza B' este $b_{11}\, b_{22} \ldots\ldots b_{nn}$.

Deoarece matricea de trecere este în mod necesar o matrice nesingulară, avem $b_{11}\, b_{22} \ldots\ldots b_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow b_{ii} \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Se poate demonstra prin inducţie după $j \geq 2$ că (5.2.11) implică

(5.2.13) $\qquad \mathcal{B}(g_j, u_i) = 0$, oricare ar fi $i < j$, $j = 2,..,n$.

Pentru $j = 2$, $\mathcal{B}(g_2, g_1) = 0 \Leftrightarrow b_{11}\,\mathcal{B}(g_2, u_1) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}(g_2, u_1) = 0$.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $j = k \geq 2$ şi o vom demonstra pentru $j = k+1$. Din (5.2.11) şi (5.2.10) rezultă că, pentru orice $p \leq k$, avem $\mathcal{B}(g_p, g_{k+1}) = \mathcal{B}(g_p, b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + \ldots + b_{k+1,k+1}u_{k+1}) = 0$. Pe de altă parte, folosind proprietăţile formei biliniare simetrice $\mathcal{B}(.,.)$ şi ipoteza de inducţie, rezultă $\mathcal{B}(g_p, g_{k+1}) = b_{k+1,1}\mathcal{B}(g_p, u_1) + b_{k+1,2}\,\mathcal{B}(g_p, u_2) + \ldots + b_{k+1,k+1}\,\mathcal{B}(g_p, u_{k+1}) = b_{k+1,k+1}\,\mathcal{B}(g_p, u_{k+1}) = 0$. Deci $\mathcal{B}(g_p, u_{k+1}) = 0$, oricare ar fi $p \leq k$ şi inducţia este completă.

Reciproc, presupunem că (5.2.13) este adevărată. Dacă $j > i$, atunci $\mathcal{B}(g_j, g_i) = \mathcal{B}(g_j, g_i) = \mathcal{B}(g_j, b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \ldots + b_{ii}u_i) = b_{i1}\mathcal{B}(g_j, u_1) + b_{i2}\,\mathcal{B}(g_j, u_2) + \ldots + b_{ii}\,\mathcal{B}(g_j, u_i) = 0$. Dacă $i > j$, atunci $\mathcal{B}(g_i, g_j) = \mathcal{B}(g_j, g_i) = 0$.

Pentru a calcula coeficienţii $b_{ij,}$ $j = 1,\ldots,i$, $i = 1,\ldots n$ se procedează astfel: a) dacă $i = 1$, atunci avem $\mathcal{B}(g_1,e_1) = 1$ şi rezultă $b_{11}a_{11} = 1$. Deci

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$$

b) pentru fiecare $i = 2,\ldots n$ avem $\mathcal{B}(u_j, g_i) = \mathcal{B}(g_i, u_j) = 0$, $j = 1,\ldots, i - 1$, conform relaţiei (5.2.13), şi $\mathcal{B}(u_i, g_i) = \mathcal{B}(g_i, u_i) = 1$, conform relaţiei (5.2.12). Se obţine sistemul:

$$b_{i1}\mathcal{B}(u_j, u_1) + b_{i2}\,\mathcal{B}(u_j, u_2) + \ldots + b_{ii}\,\mathcal{B}(u_j, u_i) = 0,\ j = 1,\ldots, i - 1$$

$b_{i1}B(u_i, u_1) + b_{i2}\ B(u_i, u_2) + \ldots + b_{ii}\ B(u_i, u_i) = 1$. Tinând cont de faptul că $a_{ij} = B(u_i, u_j)$, sistemul de mai sus devine

$$\begin{aligned} b_{i1}a_{11} + b_{i2}\ a_{12} + \ldots + b_{ii}\ a_{1i} &= 0 \\ b_{i1}a_{21} + b_{i2}\ a_{22} + \ldots + b_{ii}\ a_{2i} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i1}a_{i1} + b_{i2}\ a_{i2} + \ldots + b_{ii}\ a_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

Deoarece determinantul matricei asociate acestui sistem este chiar $\Delta_i \neq 0$, deducem că sistemul este compatibil determinat. Aplicând regula lui Cramer avem $b_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} = \beta_i$ oricare ar fi $i = 2,\ldots,n$. Demonstrația este completă.

Observația 5.2.2 Demonstrația teoremei de mai sus, reprezintă în sine o nouă metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice, metoda lui Jacobi. Principalul neajuns al acestei metode este că aceasta nu se poate aplica decât cu condiția ca şirul de determinanți Δ_i, $i = 1,\ldots,n$ să aibă toți termenii nenuli. Astfel, pentru a aduce la forma canonică forma pătratică din Exemplul 5.2.5, nu putem folosi metoda lui Jacobi. Într-adevăr, în exemplul amintit, matricea asociată formei pătratice A(.) în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi, deoarece $\Delta_1 = a_{11} = 0$, nu putem aplica teorema de mai sus.

III. Legea inerției

Lema 5.2.1. *Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n peste un corp K şi fie V_1, V_2 două subspații ale sale, de dimensiuni m şi respectiv r astfel încât $m + r > n$. Atunci $V_1 \cap V_2 \neq (0)$.*

Demonstraţie. Fie B = $\{e_1, \ldots, e_m\}$ o bază în V_1 şi B' = B = $\{g_1, \ldots, g_r\}$ o bază în V_2. Familia B $\cup$ B' este liniar dependentă deoarece $m + r > n$. Atunci există scalarii $\alpha_i \in K$, $i = 1,.., m$, $\beta_j \in k$, $j = 1,.., r$ nu toţi nuli astfel încât $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_m e_m + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \ldots + \beta_r g_r = 0$. Deci $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_m e_m = - \beta_1 g_1 - \beta_2 g_2 - \ldots - \beta_r g_r \in V_1 \cap V_2$. Este clar că $x \neq 0$. Într-adevăr, dacă $x = 0$, atunci rezultă, din liniar independenţa familiilor B şi B', că toţi scalarii α_i, β_j, $i = 1,.., m$, $j = 1,.., r$ sunt nuli, ceea ce este absurd.

Teorema 5.2.4 *(Legea inerţiei)Fie V este un spaţiu vectorial real de dimensiune n şi A : V $\to$ **R** o formă pătratică pe care o aducem la forma canonică în două baze diferite. Numărul coeficienţilor pozitivi cât şi cel al coeficienţilor negativi din formele canonice respective este acelaşi.*

Demonstraţie. Fie B = $\{e_1, \ldots, e_n\}$ şi B' = $\{g_1, \ldots, g_n\}$ două baze diferite în care forma pătratică A are forma canonică. Dacă $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, atunci $A(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_m x_m^2 - \beta_{m+1} x_{m+1}^2 + \ldots + \beta_{m+s} x_{m+s}^2$, unde toţi scalarii α_i, β_j, $i = 1,\ldots,m$, $j = m + 1,\ldots, m + s$, $m + s \leq n$ sunt pozitivi.

Dacă în baza B', pentru acelaşi vector $x = \xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n$ avem

$$A(x) = \gamma_1 \xi_1^2 + \ldots + \gamma_p \xi_p^2 - \delta_{p+1} \xi_{p+1}^2 - \ldots - \delta_{p+r} \xi_{p+r}^2,$$

toţi scalarii γ_i, β_j, $i = 1,\ldots,p$, $j = p + 1,\ldots, p + r$, $p + r \leq n$ fiind pozitivi, atunci trebuie să demonstrăm că $m = p$ şi $s = r$.

Presupunem prin absurd că $m > p$. Subspaţiile V_1 şi $V_2 \subseteq V$ generate de familiile $\{e_1, \ldots, e_m\}$ şi respectiv $\{g_{p+1}, \ldots, g_n\}$ au dimensiunile m şi respectiv $n - p$. Deoarece $m + n - p > n$ (căci $m > p$), deducem, conform lemei de mai sus, că există un vector $x \neq 0$ astfel încât $x \in V_1$ şi $x \in V_2$. Acest vector x are coordonatele $(x_1, \ldots x_m, 0, \ldots, 0)$ în baza B şi (0,

$\ldots,0$, $\xi_{p+1}, \ldots \xi_n$) în baza B'. Atunci expresia formei pătratice, în baza B, pentru vectorul x considerat mai sus este $A(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_m x_m^2 > 0$, în timp ce, în baza B', este $A(x) = - \delta_{p+1}\xi_{p+1}^2 - \ldots - \delta_{p+r}\xi_{p+r}^2 < 0$.
Am ajuns la o contradicție. Deci m = p. În acelaşi mod se arată că s = r.

Fie $A : V \to \mathbf{R}$ o formă pătratică. Dacă A(.) are forma canonică

$$A(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_m x_m^2 - \beta_{m+1} x_{m+1}^2 + \ldots + \beta_{m+s} x_{m+s}^2,\ m + s \le n$$

într - o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, atunci introducem următoarele noțiuni:

Definiția 5.2.5 *Numărul natural* m *se numeşte indexul pozitiv al formei pătratice A(.), numărul* s *se numeşte indexul negativ al formei, iar perechea* (m, s) *se numeşte signatura formei.*

Teorema 5.2.4 demonstrează de fapt că signatura unei forme pătratice nu se schimbă la schimbarea bazei.

5.3 Exerciții

1. Care din funcțiile de mai jos sunt forme biliniare ?

a) $B : P(t) \times P(t) \to \mathbf{R}$, $B(f, g) = f(2) + g(2)$, unde *P(t)* este spațiul polinoamelor în nedeterminata *t,* de orice grad, cu coeficienți reali;

b) $B : P(t) \times P(t) \to \mathbf{R}$, $B(f, g) = f(2)g(2)$;

c) $B : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + 4x_3y_4$;

d) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3 + 1$;

e) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3$;

f) $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_2^2$.

Dacă $x \in \mathbf{R}^n$, atunci convenim că $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ sunt componentele lui x.

R: a) Nu. Se poate arată că nu este satisfăcută condiţia de omogeneitate în primul (sau al doilea) argument. b) Da. Avem $B(\alpha f + \beta g, h) = [\alpha f(2) + \beta g(2)]h(2) = \alpha f(2)h(2) + \beta g(2)h(2) = \alpha B(f, h) + \beta B(g, h)$ şi analog se arată liniaritatea în al doilea argument. c) Da. d) Nu. Se poate arăta că nu este îndeplinită condiţia de aditivitate în oricare argument. e) Da. f). Nu. Se poate că nu este satisfăcută condiţia de omogeneitate în primul argument.

2. Se consideră forma biliniară $B(.,.)$ definită pe $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^5$ a cărei matrice asociată în perechea formată din bazele canonice ale spaţiilor de definiţie este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Să se determine matricea asociată formei biliniare în perechea de baze $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ şi $B_1 = \{u_1 = (1, 1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0, 0), u_3 = (3, 2, 1, 1, 0), u_4 = (0, 0, 1, 1, 1), u_5 = (1, 0, 0, 0, 0)\}$.

R: a) Matricele de trecere de la bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi respectiv $\mathbf{R}^5$ la bazele B şi respectiv B_1 sunt $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi respectiv $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se aplică formula 6.2.2 şi avem $\Lambda = MAP^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Să se verifice dacă aplicaţiile de mai jos sunt forme biliniare simetrice, şi în caz afirmativ să se scrie formele pătratice asociate.

a) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 - 3x_2y_1 + x_3y_1$;

b) $B : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 - 2x_3y_3 + x_4y_4$;

c) $B : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3 + x_4y_3$;

d) $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$.

R: a) Da. $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $A(x) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3$. b) Da. $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $A(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; c) Nu, deoarece $B(.,.)$ nu are un domeniu de definiție corespunzător. d) Da. $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A(x) = x_2^2 + 4x_1x_2$.

4. Să se aducă la forma canonică formele pătratice de la Exercițiul 3, prin una din cele trei metode studiate.

R: Pentru rezolvare punctului a) vom testa aplicabilitatea tuturor celor trei metode, pentru a exemplifica modul de lucru.

a1) Aducem forma pătratică la forma canonică prin metoda vectorilor şi valorilor proprii. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{11}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{11}$, iar vectorii proprii corespunzători sunt $v_1 = (0, 1, 3)$, $v_2 = (-1/3 - 1/3\sqrt{11}, 1, -1/3)$, $v_3 = (-1/3 + 1/3\sqrt{11}, 1, -1/3)$. Deci forma canonică este $A(x) = (1 + \sqrt{11})\xi_1^2 + (1 - \sqrt{11})\xi_2^2$, unde ξ_i, $i = 1, 2, 3$ sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2, x_3)$ în baza $B = \{v_1/\|v_1\|, v_2/\|v_2\|, v_3/\|v_3\|\}$, unde $\|v\|$ este norma euclidiană a vectorului v.

a2) Dacă utilizăm metoda lui Gauss avem $A(x) = 2[x_1^2 - 2x_1 (3/2\, x_2 - 1/2\, x_3) + (3/2\, x_2 - 1/2\, x_3)^2] - (3/2x_2 - 1/2\, x_3)^2$. Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3/2\, x_2 + 1/2\, x_3, \\ y_2 = 3/2\, x_2 - 1/2\, x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

şi obținem $A(x) = 2y_1^2 - y_2^2$.

Matricea de schimbare de coordonatelor este $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iar

matricea de trecere da la baza canonică la baza finală este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deci baza căutată este $B = \{(1, 1, 0), (0, 2/3, 1/3), (0, 0, 1)\}$.

a3) Deoarece şirul de minori principali ai matricei asociate formei pătratice în baza canonică este $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -9$, $\Delta_3 = 0$, forma polară a formei pătratice este degenerată şi metoda lui Jacobi nu se poate aplica direct.

b) Deoarece avem $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = -7$, $\Delta_4 = -7$, se poate aplica metoda lui Jacobi, pentru aducerea formei pătratice în formă canonică. Avem $A(x) = 1/2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2/7\xi_3^2 + \xi_4^2$, unde $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ în baza $u_1 = 1/2E_1$, $u_2 = - E_1 + E_2$, $u_3 = 3/7\ E_1 - 2/7E_2 - 2/7E_3$, $u_4 = E_4$. d) Aplicăm metoda lui Gauss şi avem $A(x) = -4\xi_1^2 + \xi_2^2$, unde ξ_1, ξ_2 sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2)$ în baza $u_1 = - E_2$, $u_2 = - E_1 + 2E_2$.

5. Să se precizeze dacă formele pătratice obţinute prin rezolvarea Exerciţiului 3 sunt pozitiv, negativ definite (semidefinite) sau nedefinite.

R. Deoarece o formă canonică a formei pătratice de la punctul a) (vezi a3 Exerciţiul 4) este $A(x) = 2\xi_1^2 - 9\xi_2^2$ este clar că pentru orice vector $v = \alpha u_2$, $\alpha \neq 0$ avem $A(v) = -9\alpha^2 > 0$, în timp ce pentru $v = \beta u_1$, $\beta \neq 0$, $A(v) = 2\beta^2 < 0$. Deci forma este nedefinită. Analog se arată că formele pătratice obţinute la punctele b) şi d) ale ex. 3 sunt nedefinite.

6. Care este signatura formelor pătratice studiate la exerciţiul precedent?

R: a) (1, 1). b) (3, 1). d) (1,1).

7.[*)] Dacă $A : V \to \mathbf{R}$ este o formă pătratică a cărei matrice $A = (a_{ij})_{i,j = 1,\dots,n}$, asociată formei în raport cu o bază, are proprietatea că toţi minorii principali Δ_i, $i = 1,\dots, n$ (vezi T. Jacobi) sunt pozitivi (respectiv $(- 1)^i\Delta_i > 0$) atunci forma pătratică este pozitiv (respectiv negativ) definită.

Indicaţie: Se aplică teorema lui Jacobi.

[*] Exerciţiul de mai sus este un rezultat cunoscut sub numele de criteriul lui Sylvester.

CAPITOLUL 6

GEOMETRIE LINIARĂ ÎN SPAŢIU

6.1. Sisteme de coordonate în plan şi în spaţiu

I. Coordonate carteziene

În cele ce urmează, notăm cu E_3 spaţiul punctual tridimensional al geometriei elementare şi cu V_3 spaţiul vectorilor liberi. Reamintim (vezi Observaţia 2.3.1 b)) că un punct fixat $O \in E_3$ şi o bază canonică $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ a lui V_3 definesc în mod unic un sistem de trei axe Ox, Oy şi Oz, orientate de versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi respectiv $\bar{k}$, perpendiculare două câte două şi care au aceeaşi origine şi aceeaşi unitate de măsură. Acestea formează reperul cartezian Oxyz. Datorită corespondenţei bijective între mulţimea reperelor carteziene Oxyz şi cea a ansamblelor $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se mai spune că acestea din urmă reprezintă nişte repere carteziene. Fie $M \in E_3$ şi fie M_i, i = 1,2,3 proiecţiile lui M pe axele carteziene Ox, Oy şi respectiv Oz. Notăm cu x, z şi z coordonatele corespunzătoare punctelor M_1, M_2 şi M_3 (vezi Observaţia 2.3.1 b) pentru definiţia coordonatelor). Tripletul ordonat de numere reale $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ reprezintă coordonatele carteziene ale punctului M în reperul cartezian Oxyz.

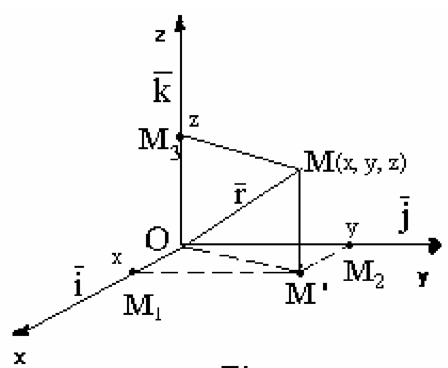


Fig.17

În cazul plan vom nota cu E_2 planul geometriei elementare. Se constată uşor că mulţimea vectorilor liberi cu reprezentanţi în planul E_2 este un subspaţiu vectorial V_2, de dimensiune 2, al lui V_3. Este clar că, în acest subspaţiu, va exista o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}\}$. Aşa cum am arătat mai sus, unui punct fixat $O \in E_2$ şi bazei $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ i se poate asocia în mod unic un sistem de axe Ox şi Oy, perpendiculare, cu aceeaşi origine şi aceeaşi unitate de lungime. Aceste axe vor defini un reper cartezian Oxy în plan. Ca şi în spaţiu, se definesc coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct $M \in E_2$ astfel încât $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$ (Fig. 18).

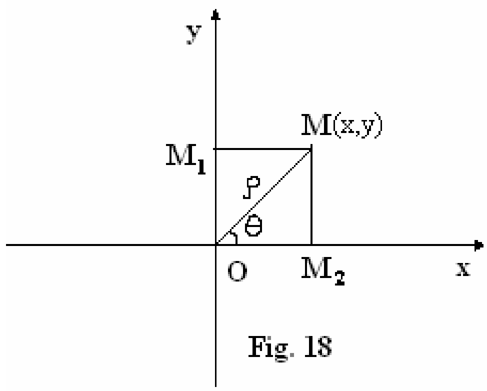


Fig. 18

II. Coordonate polare. Legătura între coordonatele carteziene şi cele polare

Considerăm Ox, o axă în planul E_2 cu originea O, numită axă polară. Atunci poziţia unui punct $M \in E_2$ poate fi caracterizată prin perechea de numere reale $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, numite coordinate polare, care au următoarea semnificaţie: ρ este distanţa euclidiană de la originea O la punctul M iar θ este măsura unghiului orientat definit de semidreptele Ox şi OM ($\theta = m(\measuredangle(Ox, OM))$). Dacă suprapunem axa polară Ox cu axa carteziană Ox, atunci se obţine următoarea legătură între coordonatele carteziene şi cele polare ale punctului M:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$ sau $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $sin\theta = y/\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+y^2}$.

III. Coordonate sferice şi cilindrice. Legătura cu coordonatele carteziene

Coordonate sferice

În spaţiul E_3 considerăm reperul Oxyz format din trei drepte concurente în O, perpendiculare două câte două. Fie $M \neq O$ un punct din E_3 şi fie M_i, i = 1,2,3 proiecţiile lui M pe dreptele Ox, Oy şi Oz. De asemenea fie M\` proiecţia punctului M pe planul Oxy (vezi Fig. 19). Notăm cu r distanţa euclidiană dintre O şi M, cu θ măsura unghiului orientat ∢(Ox, OM\`), θ∈ [0,2π) şi cu φ măsura unghiului orientat ∢(Oy, OM), φ∈ [0,π). Numerele reale (r, θ, φ) se numesc *coordonatele sferice* ale punctului M.

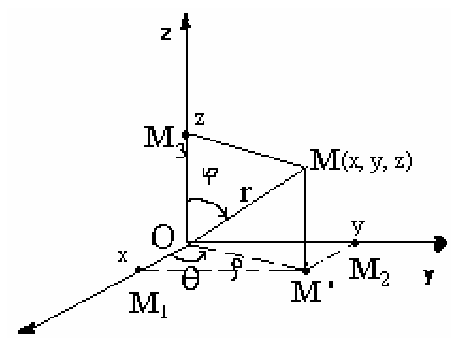


Fig. 19

Fie (x, y, z) coordonatele carteziene ale punctului M. Dacă notăm ρ = OM\` se observă că $x = \rho cos\ \theta$, $y = \rho\ sin\ \theta$, $\rho = r\ sin\varphi$. Acum este uşor de văzut că *legătura dintre coordonatele sferice* (r, θ, φ) *şi cele carteziene* este dată de relaţiile

$$x = rsin\varphi\, cos\ \theta,\ y = rsin\varphi\, sin\ \theta,\ z = rcos\varphi.$$

Originea este definită de ρ = 0 şi θ, φ nedeterminaţi.

Coordonate cilindrice

Considerăm reperul cartezian Oxyz şi punctul $M \in E_3$, $M \neq O$ (Fig. 20). Dacă M` este proiecţia punctului M pe planul Oxy atunci considerăm tripletul (ρ, θ, z) unde ρ şi θ sunt definiţi ca şi în cazul coordonatelor sferice iar z este coordonata proiecţiei M_3 a lui M pe axa Oz. Este clar că între coordonatele carteziene şi cele cilindrice există următoarele relaţii

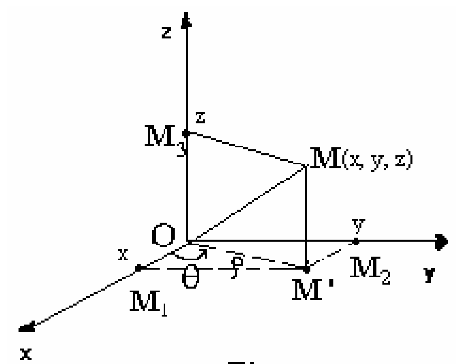


Fig. 20

$x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$, $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Originea este definită de ρ = 0 şi z = 0 şi θ nedeterminat.

6.2. Rototranslaţia în plan şi spaţiu

Definiţia 6.2.1 *Fie V_3 spaţiul vectorial al vectorilor liberi dotat cu produsul scalar introdus de Definiţia 2.4.1.*

a) O transformare liniară ortogonală $R \in L_{\mathbf{R}}(V_3)$, a cărei matrice asociată într-o bază a lui V_3 are determinantul egal cu 1 se numeşte rotaţie.

b) Dacă $v \in V_3$, atunci funcţia $T: V_3 \to V_3$ definită prin

$T(x) = x + v$, $x \in V_3$

se numeşte translaţie de vector v.

Propoziţia 6.2.1 *a) Rotaţia păstrează produsul scalar şi în consecinţă distanţa euclidiană. b) Dacă T este o translaţie de vector*

v atunci T^{1} există şi este tot o translaţie de vector -v. c) Translaţia păstrează distanţa euclidiană.

Demonstraţie. a) Intr-adevăr, rotaţia este în particular o transformare ortogonală şi, în consecinţă, păstrează produsul scalar (a se vedea punctul 3. din Propoziţia 4.4.1). Fie x, y $\in V_3$. Avem $\|R(x)-R(y)\|^2 = \|R(x-y)\|^2$ = $< R(x - y), R(x - y)> = <(x - y), (x - y)> = \|x-y\|^2$ şi rezultă concluzia.

b) Dacă $T^{-1}: V_3 \to V_3$, $T^{-1}(x) = x - v$, $x\in V_3$ atunci $T\circ T^{-1}(x) = T^{-1}(x) + v = x - v + v = x$, pentru orice $x \in V_3$. Analog se arată că $T^{-1}\circ T(x) = x$, $x \in V_3$ şi rezultă concluzia. c) Este trivial.

O funcţie $f : V_3 \to V_3$, care este surjectivă şi care păstrează distanţa euclidiană se numeşte *izometrie*. Aplicând propoziţia de mai sus, deducem că rotaţiile şi translaţiile sunt izometrii. Este uşor de văzut că rezultatul compunerii a două izometrii este tot o izometrie. În general, se poate arăta că orice izometrie *f* este fie o transformare ortogonală dacă $f(0) = 0$, fie o compunere dintre o rotaţie R şi o translaţie T, $f = T \circ R$, în caz contrar.(Pentru demonstraţie se poate consulta [6].)

Schimbări de repere carteziene în plan

Considerăm două repere carteziene $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ şi $\{O`, \bar{i}`, \bar{j}`\}$ în planul $E_2$ (izomorf cu $\mathbf{R}^2$). Primul reper cartezian va mai fi notat şi Oxy iar cel de al doilea O`x`y`, după numele axelor

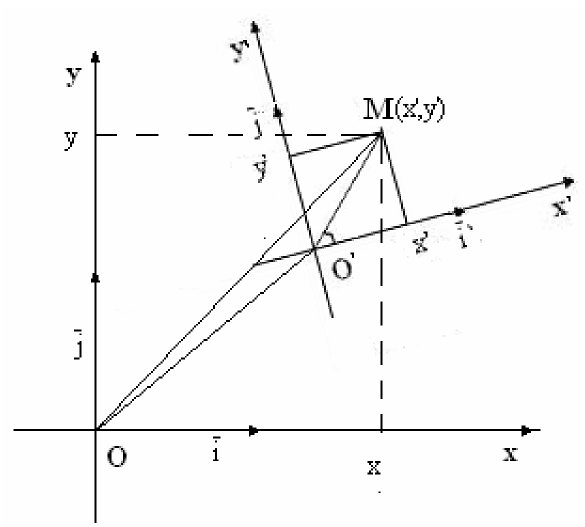


Fig. 21

de coordonate asociate. Fie $M \in E_2$ un punct ale cărui coordonate carteziene faţă de cele două repere sunt (x, y) şi respectiv (x`,y`).

Presupunem că (a, b) sunt coordonatele punctului O` în raport cu reperul cartezian Oxy şi că θ este unghiul dintre direcţia axei Ox şi cea a axei O`x`.

În cele ce urmează vom arăta că aplicaţia f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, (x`, y`) → (x, y), care în mod evident este o izometrie, este compunerea dintre o rotaţie R şi o translaţie T, $f = T \circ R$.

Pentru început, observăm că relaţia $\overline{OM} = \overline{OO`} + \overline{O'M}$ se mai scrie

(6.2.1) $$x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + x`\bar{i}` + y`\bar{j}`.$$

Reamintim că $<\bar{i},\bar{j}> = 0$, $<\bar{i},\bar{i}> = 1$, $<\bar{i},\bar{i}`> = \cos\theta$, $<\bar{i},\bar{j}`> = \cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$, $<\bar{j},\bar{j}> = 1$, $<\bar{j},\bar{i}`> = \sin\theta$, $<\bar{j},\bar{j}`> = \cos\theta$.

Făcând pe rând produsul scalar dintre $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi (6.2.1) obţinem relaţiile

(6.2.2) $$\begin{cases} x = a + x`\cos\theta - y`\sin\theta \\ y = b + x`\sin\theta + y`\cos\theta. \end{cases}$$

Definim aplicaţia R: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, R(x`, y`) = (x”, y”),

$$x” = x`\cos\theta - y`\sin\theta,\ y” = x`\sin\theta + y`\cos\theta.$$

Este uşor de văzut că R este o rotaţie, în sensul Definiţiei 6.2.1. Intuitiv, această transformare arată cum se schimbă coordonatele unui punct M dacă reperul cartezian faţă de care se calculează noile coordonate se obţine prin rotirea lui O`x`y` cu unghiul θ în sensul acelor de ceasornic. Din acest motiv spunem că R este o rotaţie de unghi θ.

Pe de altă parte, aplicaţia T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, T(x”, y”) = (x, y), x = a + x”, y = b + y” este în mod evident o translaţie de vector v = (a, b). Acum este clar că $f = T \circ R$, ceea ce trebuia demonstrat. Din acest motiv izometria f se mai numeşte şi rototranslaţie în plan.

6.3. Planul în spațiu

În spațiul geometriei euclidiene E_3, un plan este o submulțime a lui E_3 (sau $\mathbf{R}^3$) determinată în mod unic de condiții geometrice de tipul:

1) un punct şi un vector normal la plan;
2) trei puncte necoliniare;
3) două drepte concurente;
4) o dreaptă şi un punct exterior dreptei etc.

În cele ce urmează vom considera, fără a mai specifica acest lucru de fiecare dată, că $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este o bază canonică a lui V_3 şi $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este reperul cartezian asociat.

6.3.1 Planul determinat de un punct şi de un vector normal la plan

Fie *P* un plan din V_3. Un vector liber din V_3, a cărui direcție este perpendiculară pe planul *P* se numeşte *vector* normal la plan sau, pe scurt, *normală* la plan. Considerăm vectorul liber $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k} \in V_3$ şi punctul $M_0(x_o, y_0, z_0) \in E_3$. În continuare vom stabili ecuațiile planului *P* ce conține punctul M_0 şi are normala la plan $\bar{n}$. (vezi Fig. 22).

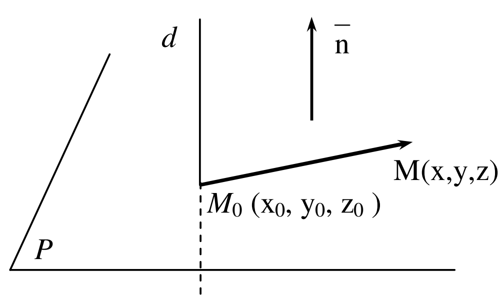


Fig. 22

Este uşor de văzut că un punct curent $M(x, y, z)$ este situat în planul *P* dacă şi numai dacă vectorii liberi $\overline{M_0M}$ şi $\bar{n}$ sunt ortogonali,

adică dacă $<\overline{M_0M}, \overline{n}> = 0$. Observăm că $\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} + (z - z_0)\overline{k}$ şi, folosind Teorema 2.4.1 (5.), obţinem :

(6.3.1) $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ecuaţia de mai sus se numeşte *ecuaţia planului determinat de un punct şi o normală dată.* Dacă notăm $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, relaţia (6.3.1) se scrie

(6.3.2) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

şi am obţinut *ecuaţia carteziană generală* a planului P.

Se poate arăta că dacă A, B, C, D $\in$ **R,** $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, atunci mulţimea L, formată din toate punctele M $\in E_3$ ale căror coordonate carteziene (x,y,z) (faţă de reperul cartezian Oxyz) satisfac relaţia (6.3.2), este un plan din E_3. Într-adevăr dacă $M_0(x_o, y_0, z_0) \in L$, atunci $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ şi orice alt punct $M(x, y, z) \in L$ va satisface (6.3.1). Deci $<\overline{M_0M}, \overline{n}> = 0$, unde $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k} \in V_3$, ceea ce înseamnă că toate punctele M se află într-un plan perpendicular pe direcţia lui $\overline{n}$, plan ce conţine pe M_0. De aici rezultă uşor concluzia.

Observaţia 6.3.1 a) Conform celor spuse mai sus, orice plan $P \subset E_3$ este caracterizat, într-un reper cartezian *Oxyz,* de o ecuaţie de tipul (6.3.2), unde coeficienţii A, B, C nu sunt toţi nuli.

b) În ecuaţia (6.3.2), coeficienţii A, B, C reprezintă coordonatele vectorului normal la plan. Deci, două plane ale căror ecuaţii diferă prin termenul liber sunt plane paralele, iar ecuaţia

(6.3.2)` $$Ax + By + Cz = \lambda \ , \ \lambda \in \mathbf{R},$$

reprezintă familia planelor paralele din spațiu de normală dată $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$. Pentru $\lambda = 0$, ecuația (6.3.2)` reprezintă ecuația unui plan care conține originea reperului cartezian Oxyz.

c) Ecuațiile planelor de coordonate sunt următoarele

$z = 0$ – ecuația planului xOy

$y = 0$ – ecuația planului xOz

$x = 0$ – ecuația planului yOz. (Exercițiu).

d) Dacă în locul normalei $\bar{n}$ considerăm versorul $\bar{n}/\|\bar{n}\|$ ($\|\bar{n}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$), care este la rândul lui o normală la plan, atunci ecuația (6.3.2) se scrie sub forma $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ şi se numeşte *ecuația normalizată* a planului *P*.

6.3.2. Ecuația planul determinat de trei puncte necoliniare

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in E_3$ trei puncte necoliniare. Un punct curent $M(x, y, z)$ este situat în planul *P* dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ şi $\overline{M_1M_3}$ sunt coplanari. Punctul 2. al Teoremei 2.6.1 ne asigură că aceşti vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă

(6.3.3) $$< \overline{M_1M}, \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} > = 0.$$

Dacă notăm cu $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ şi respectiv $\bar{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, $i = 1, 2, 3$ vectorii de poziție ai punctelor *M*, respectiv M_i, $i = 1, 2, 3$ în reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, $(Oxyz)$, atunci $\overline{M_1M} = \overline{OM} - \overline{OM_1} = \bar{r} - \bar{r}_1 = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} + (z - z_1)\bar{k}$ (vezi Fig. 23), $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$, $\overline{M_1M_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1 = (x_3 - x_1)\bar{i} + (y_3 - y_1)\bar{j} + (z_3 - z_1)\bar{k}$.

Relația (2.6.1) ne asigură că

$$< \overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} > = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Folosind proprietățile determinanților, obținem ecuația echivalentă

$$(6.3.4)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

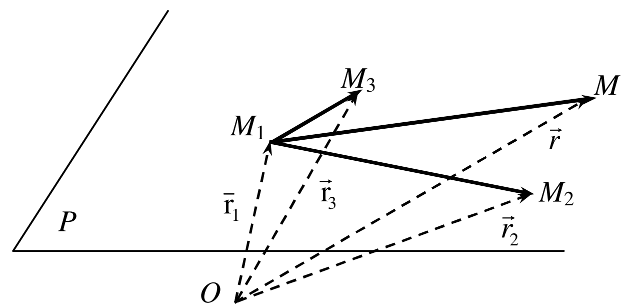


Fig. 23

Ecuația (6.3.4) este *ecuația carteziană* a planului determinat de cele trei puncte M_1, M_2, M_3.

Pe de altă parte, Teorema 2.3.1 b) ne asigură că cei trei vectori $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ şi $\overline{M_1M_3}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenți, adică dacă există scalarii α, β, γ, nu toți nuli astfel încât $\alpha\overline{M_1M} + \beta\overline{M_1M_2} + \gamma\,\overline{M_1M_3} = 0$. Dacă $\alpha = 0$, atunci $\beta \neq 0$ sau $\gamma \neq 0$ şi ar rezulta că sistemul $\{\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\}$ este liniar dependent. Dar sistemul $\{\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\}$ nu poate fi liniar dependent, căci elementele sale nu sunt vectori coliniari (M_1, M_2, M_3 sunt puncte necoliniare, prin ipoteză). Deci $\alpha \neq 0$. Deducem că planul P este format din toate punctele $M \in E_3$ pentru care există λ, $\mu \in$ **R** astfel încât $\overline{M_1M} = \lambda\overline{M_1M_2} + \mu\overline{M_1M_3}$ }

Altfel spus, planul P este caracterizat de relația vectorială

$$(6.3.5)\qquad \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) + \mu(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \quad , \quad \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$$

numită *ecuația vectorială* a planului prin trei puncte.

Ecuația vectorială (6.3.5), scrisă în reperul cartezian *Oxyz,* este echivalentă cu ecuațiile

$$(6.3.6)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0), \quad \lambda, \mu \in \boldsymbol{R} \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

numite *ecuaţiile carteziene parametrice* ale planului determinat de trei puncte.

6.3.3. Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari

Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ şi vectorii liberi $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$, necoliniari, adică $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \neq 0$. Se ştie că există un plan unic P care conţine punctul M_0 şi este paralel cu dreptele suport d_1, d_2 ale unor reprezentanţi ai vectorilor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Punctul $M(x, y, z) \in P$ dacă şi numai dacă vectorii liberi $\overline{M_0M}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coplanari. Deci produsul lor mixt trebuie să fie este nul, adică $<\overline{M_0M}, \bar{v}_1 \times \bar{v}_2> = 0$. Deoarece $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$, obţinem $<\overline{M_0M}, \bar{v}_1 \times \bar{v}_2> = 0$ sau, echivalent,

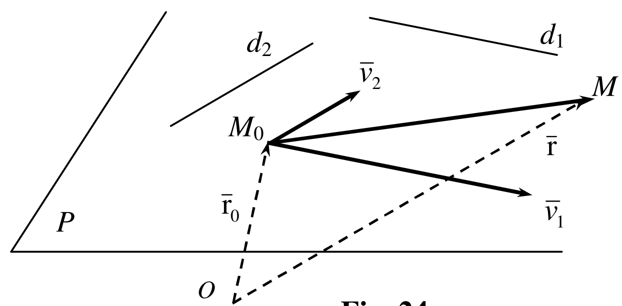


Fig. 24

$$(6.3.7)\qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia obţinută mai sus se numeşte *ecuaţia carteziană* a planului printr-un punct, paralel cu două direcţii date.

Pe de altă parte, aplicând Teorema 2.3.1 b) şi raţionând ca în paragraful precedent, deducem că $M \in P$ dacă şi numai dacă există

scalarii λ, $\mu \in$ R astfel încât $\overline{M_0M} = \lambda\bar{v}_1 + \mu\bar{v}_2$. Deci planul *P* este caracterizat de relaţia vectorială

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\bar{v}_1 + \mu\bar{v}_2\ ,\quad \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}. \tag{6.3.8}$$

Această ecuaţie este numită *ecuaţia vectorială* a planului printr-un punct, paralel cu două direcţii.

Proiectând ecuaţia (6.3.8) pe axele sistemului cartezian de coordonate, *Oxyz*, obţinem ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, l_1 + \mu l_2 \\ y = y_0 + \lambda\, m_1 + \mu m_2\ , \\ z = z_0 + \lambda\, n_1 + \mu n_2 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \tag{6.3.9}$$

numite *ecuaţiile carteziene sub formă parametrică* ale planului printr-un punct, paralel cu două direcţii.

6.3.4. Poziţia relativă a două plane

Studiind mulţimea soluţiilor sistemului format din ecuaţiile a două plane π_1, $\pi_2 \subset E_3$, se va constata că există următoarele poziţiilor geometrice ale celor două plane: planele se intersectează după o dreaptă; plane sunt (strict) paralele; planele sunt confundate.

Presupunem că, faţă de reperul cartezian $\{O;\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, planele π_1 şi π_2 au ecuaţiile (π_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, ($\pi_2$): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \tag{6.3.10}$$

Notăm cu $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ (respectiv $\overline{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$) matricea (respectiv matricea extinsă) a sistemului.

Dacă $rang(M) = rang(\overline{M}) = 2$, atunci sistemul (6.3.10) este compatibil simplu nedeterminat. Mulţimea soluţiilor lui reprezintă punctele comune celor două plane, adică, aşa cum vom vedea în paragraful următor, o dreaptă $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

Dacă $rang(M) = rang(\overline{M}) = 1$, atunci sistemul (6.3.10) este compatibil dublu nedeterminat şi cele două plane coincid, $\pi_1 \equiv \pi_2$. (Temă: arătaţi că $rang(M) \neq 0$) .

Dacă $rang(M) \neq rang(\overline{M})$, sistemul (6.3.10) este incompatibil şi cele două plane nu au nici un punct comun, $\pi_1 \parallel \pi_2$.

6.4. Dreapta în spaţiu

În spaţiul geometric E_3, o dreaptă este unic determinată prin condiţii geometrice de tipul: un punct şi un vector nenul (o direcţie dată), două puncte distincte, intersecţia a două plane.

6.4.1. Dreapta determinată de un punct şi o direcţie (un vector director)

Fie un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ şi vectorul liber nenul $\bar{v} \in V_3$. Atunci punctul M_0 împreună cu mulţimea punctelor $M \in E_3$, cu proprietatea că vectorii liberi $\overline{M_0M}$ şi $\bar{v}$ sunt coliniari, defineşte o dreaptă unică din E_3. (Coliniaritatea celor doi vectori exprimă faptul că punctul M aparţine unei drepte care trece prin M_0 şi este paralelă cu dreapta suport a lui $\bar{v}$.)(vezi Fig. 25)

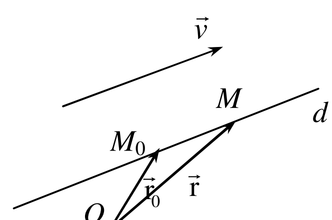


Fig. 25

Observând că $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, relaţia de coliniaritate se mai scrie

(6.4.1) $\quad \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{v}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Ecuaţia obţinută se numeşte *ecuaţia vectorială* a dreptei d care trece prin punctul M_0 şi are direcţia dată de vectorul $\bar{v}$ (dreapta d este paralelă cu dreapta suport a unui reprezentant al lui $\bar{v}$). Dacă proiectăm relaţia (6.4.1) pe axele reperului cartezian $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, obţinem *ecuaţiile parametrice* ale dreptei d prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, având direcţia dată de vectorul $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$:

(6.4.2)
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases}.$$

Vectorul $\vec{v} = (l, m, n) \in V_3$ se numeşte *vectorul director* al dreptei d iar coordonatele $l, m, n \in \mathbf{R}$ se numesc *parametrii directori* ai dreptei d.

Dacă vectorul director este versorul $\bar{e}$, care formează unghiurile α, β, γ cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz, atunci $\bar{e} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$. În acest caz $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt *parametrii directori* ai dreptei d şi se vor numi *cosinusurile directoare* ale dreptei. Ele satisfac relaţia

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Revenind la cazul general, în care vectorul director este $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$, presupunem că $l, m, n \neq 0$. Eliminând parametrul λ din ecuaţiile (6.4.2) se obţin ecuaţiile:

(6.4.3)
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

numite ecuaţiile *carteziene canonice* ale dreptei d, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia dată de vectorul $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$.

Observaţia 6.4.1. Dacă o parte dintre parametrii directori l, m, n sunt nuli, atunci ecuaţiile (6.4.3) se modifică după cum urmează.

Cazul I. (un singur parametru director nenul). Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $l \neq 0$. Eliminând parametrul λ din ecuațiile (6.4.2), obținem

(6.4.4) $$d: \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},\ x = x_0.$$

Analog se obține $d: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}$, $z = z_0$, dacă $n = 0$, etc.

Cazul II. (doi parametri directori nenuli). Dacă $l = m = 0$, atunci, din (6.4.3**),** obținem următoarele ecuații pentru dreapta

(6.4.5) $$d: \ x = x_0,\ y = y_0,\ z \in \mathbf{R}.$$

În mod asemănător se obțin ecuațiile $d: \ x = x_0,\ z = z_0,\ y \in \mathbf{R}$, dacă $l = n = 0$ şi $d: \ y = y_0,\ z = z_0,\ x \in \mathbf{R}$, dacă $m = n = 0$

6.4.2. Dreapta determinată de două puncte distincte

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in E_3$ două puncte distincte. Aceste puncte determină o dreaptă unică d. Această dreaptă trece prin M_1 şi are drept vector director pe $\overline{M_1M_2}$. Particularizând ecuația (6.4.1), obținem ecuația vectorială a dreptei

(6.4.6) $$d:\ \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}_1),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

O formă echivalentă a acesteia este următoarea d: $\bar{r} = (1-\lambda)\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

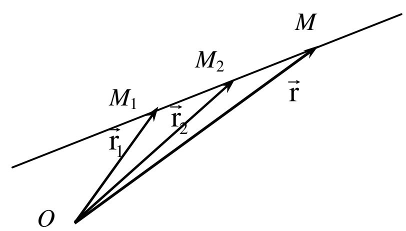


Fig. 26

Ecuațiile parametrice ale dreptei prin două puncte sunt următoarele

(6.4.7) $$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

De asemenea, dacă $x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2 \neq 0$, ecuațiile *carteziene canonice* (vezi ec. (6.4.3)) ale dreptei d sunt

(6.4.8)
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Dacă nu avem îndeplinită condiţia de mai sus, atunci ecuaţiile (6.4.8) se modifică aşa cum am arătat în Observaţia 6.4.1.

Observaţia 6.4.2 Pentru $\lambda \in (0, 1)$ ecuaţiile (6.4.7) definesc mulţimea punctelor de pe dreapta d cuprinse între punctele M_1 şi M_2, iar pentru $\lambda \in R \setminus [0, 1]$ aceleaşi ecuaţii definesc mulţimea punctelor dreptei d care sunt exterioare segmentului M_1M_2. Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ obţinem coordonatele mijlocului segmentului M_1M_2.

6.4.3. Dreapta ca intersecţie a două plane

Fie planele π_1 şi π_2 cu ecuaţiile (π_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, (π_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Din geometria elementară se ştie că dacă planele π_1 şi π_2 nu sunt paralele, atunci ele se intersectează după o dreaptă d. În paragraful 6.3.4, am arătat că acest lucru se întâmplă dacă sistemul format din ecuaţiile celor două plane este compatibil nedeterminat. Deci ecuaţia dreptei d, dată de intersecţia celor două plane este

$$\text{D: } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Este uşor de văzut că vectorul director al dreptei d este $\overline{v} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$, unde $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ sunr normalele planelor π_1 şi π_2.

6.4.4. Poziţia relativă a două drepte

Fie dreptele d_1 şi d_2 cu vectorii directori $\overline{v}_1 = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$ şi respectiv $\overline{v}_2 = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$. Considerăm punctele $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$. Avem următoarele cazuri:

Cazul I. Dacă vectorii liberi $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ şi $\overline{M_1M_2}$ sunt necoplanari, adică $<\overline{M_1M_2},\ \bar{v}_1\times\bar{v}_2> \neq 0$, atunci dreptele d_1 şi d_2 sunt necoplanare (drepte oarecare în spaţiu). În acest caz există o direcţie normală unică, comună cele două drepte, dată de $\bar{v}=\bar{v}_1\times\bar{v}_2$ şi, deci, o unică dreaptă care se sprijină pe cele două drepte şi are direcţia $\bar{v}$ (Fig. 27), numită *perpendiculara comună* a dreptelor d_1 şi d_2. Perpendiculara comună d este dată de intersecţia planelor π_1 şi π_2, unde π_1 este planul determinat de punctul M_1 şi vectorii necoliniari $\bar{v}$ şi $\bar{v}_1$ iar π_2 este planul determinat de punctul M_2 şi vectorii necoliniari $\bar{v}$ şi $\bar{v}_2$. Dacă $\bar{v}=l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$, atunci

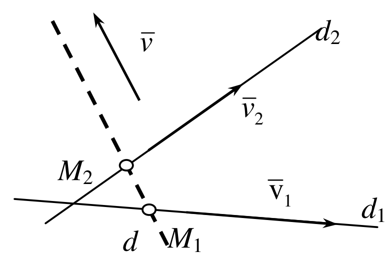


Fig. 27

$$d:\quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Cazul II. Dacă vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ şi $\overline{M_1M_2}$ sunt coplanari , adică $<\overline{M_1M_2},\ \bar{v}_1\times\bar{v}_2> = 0$, atunci dreptele d_1 şi d_2 sunt coplanare. Dacă în plus vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ sunt necoliniari, atunci dreptele d_1 şi d_2 sunt concurente, în caz contrar ele sunt paralele sau confundate.

6.5. Distanţe în plan şi în spaţiu

6.5.1. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie $d \subseteq E_3$ o dreaptă ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ şi are vectorul director $\bar{v}=l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$ şi fie $A(x, y, z) \in E_3$ un punct care nu aparţine dreptei *d*. Se ştie că distanţa dintre punctul A şi dreapta *d* este de

fapt distanţa dintre punctul A şi proiecţia ortogonală A\` a acestuia pe dreaptă (Fig. 28). Dacă notăm cu $\delta(A, d)$ distanţa de la punctul A la dreapta d, observăm că aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{M_0A}$ şi $\overline{v}$ este $\delta(A, d) \cdot \|\overline{v}\|$. Pe de altă parte, interpretarea geometrică a normei produsului $\overline{v} \times \overline{M_0A}$ (vezi Observaţia 2.5.1.) ne conduce la formula $\delta(A, d) \cdot \|\overline{v}\| = \overline{v} \times \overline{M_0A}$. De aici obţinem

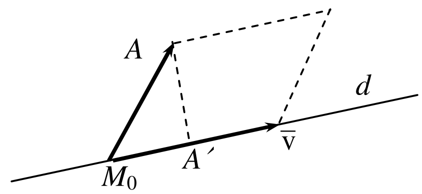


Fig. 28

(6.5.1) $$\delta(A, d) = \frac{\| \overline{v} \times \overline{M_0A} \|}{\| \overline{v} \|}.$$

Dacă punctul A aparţine dreptei d, atunci este evident că $\delta(A, d) = 0$.

6.5.2. Distanţa de la un punct la un plan

Distanţa de la un punct M_0 la un plan $P : Ax + By + Cz + D = 0$ este dată de distanţa dintre punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi punctul $M_0'(x', y', z')$, proiecţia ortogonală a acestuia pe planul P. Observăm că vectorul $\overline{M_0M_0^{`}}$ şi normala $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ la planul $P$ sunt coliniari. Prin definiţie $<\overline{M_0M_0^{`}}, \overline{n}> = \|\overline{n}\| \, \|\overline{M_0M_0^{`}}\| \cos(0)$. Pe de altă parte, $\overline{M_0M_0^{`}} = \overline{r} - \overline{r}_0 = (x_0 - x_0')\overline{i} + (y_0 - y_0')\overline{j} + (z_0 - z_0')\overline{k}$ şi $<\overline{M_0M_0^{`}}, \overline{n}> =$

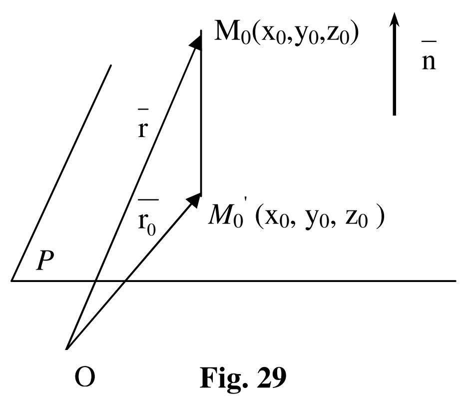


Fig. 29

$(x_0 - x_0')A + (y_0 - y_0')B + (z_0 - z_0')C = x_0A + y_0B + z_0C + D$. Deci $| x_0A + y_0B + z_0C + D | = \|\bar{n}\| \, \|\overline{M_0M_0'}\|$. Deoarece $\|\bar{n}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, obţinem

$$(6.5.2) \qquad \delta(M_0, P) = \|\overline{M_0M_0'}\| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6.5.3. Distanţa dintre două drepte oarecare în spaţiu

Fie d_1 şi d_2 două drepte din spaţiu ai căror vectori directori sunt $\bar{v}_1 = l_1\bar{i} + m_1\bar{j} + n_1\bar{k}$ şi $\bar{v}_2 = l_2\bar{i} + m_2\bar{j} + n_2\bar{k}$. Dacă d este perpendiculara comună a celor două drepte, fie P_1 şi P_2 punctele de contact ale acesteia cu d_1 şi d_2. Fie $M_i(x_i, y_i, z_i) \in d_i$, i = 1,2. Construim paralelipipedul

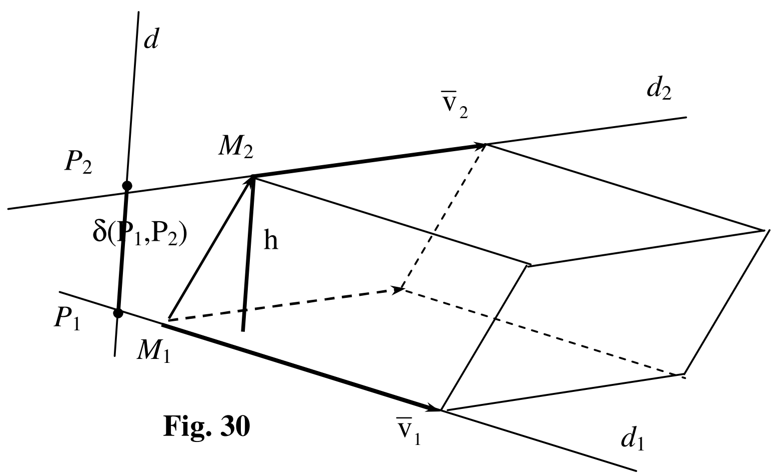


Fig. 30

determinat de vectorii $\overline{M_1M_2}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ şi observăm că distanţa $\delta(d_1, d_2)$ dintre dreptele d_1 şi d_2 este dată de $\delta(P_1, P_2)$, distanţa dintre P_1 şi P_2 şi este egală cu înălţimea paralelipipedului astfel construit. Având în vedere interpretarea geometrică a produsului mixt $<\overline{M_1M_2}, \bar{v}_1 \times \bar{v}_2>$, putem exprima în două feluri volumul paralelipipedului şi obţinem

$$(6.5.3) \qquad \delta(d_1, d_2) = \delta(P_1, P_2) = \frac{|<\overline{M_1M_2}, \bar{v}_1 \times \bar{v}_2>|}{\| \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \|}.$$

6.6. Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia planului π, dacă se cunosc punctele *A* (*a*, 0, 0), *B* (0, *b*, 0), *C* (0, 0, *c*) în care acesta intersectează axele reperului *Oxyz*.

R: Ecuaţia carteziană a planului determinat de puncte A, B, C este

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 .$$ Calcul determinantului conduce la ecuaţia $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

numită şi *ecuaţia prin tăieturi* a planului *π.*

2. Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,4}$ să fie situate într-un plan este $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Indicaţie: Observăm că $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$< \overline{M_1M_4}\, ,\ \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} > = 0$. Se aplică Teorema 2.6.1.

3. Să se scrie ecuaţia unui plan π care

a) este paralel cu planul xOy şi trece prin punctul *A* (2, 1, 5).

b) trece prin punctul *A* (1, 2, 3) şi conţine axa Oy.

c) este paralel cu axa Ox şi trece prin punctele *A* (4, 0, 2) şi B(5, 1, 7)

R: a) Normala la plan este $\overline{n} = 0\overline{i} + 0\overline{j} + \overline{k}$. Scriem formula (6.3.1) şi obţinem 0(*x* - 2) + *0*(*y* - 1) + 1(*z* - *5*) = 0. Deci π are ecuaţia z-5 = 0.

b) Dacă planul π conţine axa Oy atunci el conţine două puncte de pe axă, de exemplu O (0, 0, 0), *B* (0, 1, 0). Ecuaţia planului determinat de cele trei puncte A, O, B este

$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, adică 3x + y = 0. c) În mod evident planul conţine punctul A şi este paralel cu dreptele suport ale vectorilor liberi $\overline{AB}$ = (5-4) $\bar{i}$ + (1-0) $\bar{j}$ + (7-2) $\bar{k}$ şi $\bar{i}$ (vectorul director al dreptei Ox). Aplicăm formula (6.6.7) şi avem $\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9y - 2z = 0$.

4. a) Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(0,2,4)$, $M_3(1,3,3)$.

b) Să se verifice dacă punctele $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(0,2,4)$, $M_3(1,3,3)$, $M_4(4, 0, -3)$, $M_5(0, 0, 3)$ sunt coplanare.

R: a) Scriem ecuaţia (6.3.4) şi avem π: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Deci π: -3x + y – 2z + 6 = 0. b) Aplicăm exerciţiul 2. Observăm că $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi deducem că M∈π(π este planul de la punctul a)). Deoarece $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că şi $M_5 \in \pi$.

Deci cele 5 puncte sunt coplanare.

5. a) Să se scrie ecuaţia unui plan care taie axele de coordonate în punctele $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 0, 3)$.

b) Să se scrie ecuaţia generală a unui plan care trece prin punctul $M_0(-1, 2, 7)$ şi taie axele de coordonate în segmente egale între ele.

c) Să se determine intersecţiile cu axele de coordonate ale planului *P*: 3x – 4y +6z -24 = 0.

R: a) Aplicăm ecuaţia prin tăieturi (vezi Ex. 1) şi avem $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

b) Ecuaţia prin tăieturi (vezi Ex. 1) a planului π este $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, $a \neq 0$. Punând condiţia $M_0 \in \pi$, obţinem $\frac{-1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{7}{a}=1$, de unde rezultă a = 8. Ecuaţia planului este x + y + z - 8 = 0. c) Ecuaţia prin tăieturi a planului *P* este $\frac{x}{8}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4}=1$. Punctele de intersecţie cu axele sunt *A* (8, 0, 0), *B* (0, -6, 0), *C* (0, 0, 4).

6. a) Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin $M_0(1, -1, 2)$ şi este perpendicular pe dreapta M_0P, unde P(3, 4, 1).

b) Să se scrie ecuaţia unui plan ştiind că $M_0(2, -6, 3)$ este piciorul perpendicularei coborâte din originea reperului cartezian pe acest plan.

R: a) Ştim că o normală la plan este vectorul liber $\overline{M_0P}$ = (3-1) $\bar{i}$ + (4+1) $\bar{j}$ + (1-2) $\bar{k}$

Folosim ecuaţia (6.3.1) şi avem $2(x - 1) + 5(y + 1) - 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - z + 5 = 0$.

b) O normală la plan este $\overline{M_0O} = 2\,\bar{i} - 6\,\bar{j} + 3\,\bar{k}$. Ecuaţia planului $2(x - 2) - 5(y + 6) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y + 3z - 49 = 0$.

7. Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin $M_0(2, -7, 15)$ şi

a) este paralelă cu axa Ox;

b) este paralelă cu dreapta d_1: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+3}{6}$.

c) care este paralelă cu dreapta d_2: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ z + 15 = 0 \end{cases}$.

R: a) Un vector director al dreptei este $\bar{i}$. Adaptând ecuaţiile din Observaţia 6.4.1 (cazul II) la cazul de faţă avem $y = -7$, $z = 15$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Vectorul director atât al dreptei d_1, anume $\bar{v} = 4\bar{i} - 7\bar{j} + 6\bar{k}$ este vector director şi pentru dreapta căutată. Scriind ecuaţia dreptei care trece prin M_0 şi are vectorul director $\bar{v}$ avem $\frac{x-2}{4} = \frac{y+7}{-7} = \frac{z-15}{6}$.

c) Fie $\bar{n}_1 = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ vectorul normal la planul $2x - y + 3z + 1 = 0$ şi $\bar{n}_2 = \bar{k}$ vectorul normal la planul $z + 5 = 0$. Atunci $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ este vector director pentru dreapta d_2 şi, în consecinţă, pentru dreapta căutată *d*. Deoarece $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = -\bar{i} - 2\bar{j}$, ecuaţiile dreptei *d* sunt $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+7}{-2}$, $z = 15$.

8. a) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin $M_1(3, 0, 1)$, $M_2(0, 2, 4)$.
b) Să se studieze coliniaritatea punctelor $M_1(3, 0, 1)$, $M_2(0, 2, 4)$, $M_3(1, 4/3, 3)$.

R: a) Scriem ecuaţiile (6.4.8) şi avem $\frac{x-3}{0-3} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-1}{4-1} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

b) Coliniaritatea punctelor M_1, M_2 şi M_3 este echivalentă cu faptul că $M_3 \in M_1M_2$. Deci coordonatele punctului M_3 trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei M_1M_2 obţinută la punctul a). Deoarece $\frac{1-3}{-3} = \frac{4/3}{2} = \frac{3-1}{3}$ rezultă că într-adevăr $M_3 \in M_1M_2$, deci punctele M_1, M_2 şi M_3 sunt coliniare.

9. a) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin $M_0(7, -15, 13)$ şi formează cu axele de coordonate unghiurile $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/6$.
b) Să se determine cosinusurile directoare ale dreptei

$$d_1: \ \frac{x-17}{4} = \frac{y-3}{3}, \ z = 5.$$

c) Să se determine cosinusurile directoare ale dreptei d_2: $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases}$.

R: a) Se cunoaşte vectorul director al dreptei $\bar{v} = \cos(\pi/3)\bar{i} + \cos(\pi/2)\bar{j} + \cos(\pi/6)\bar{k}$ $= (1/2)\bar{i} + (\sqrt{2}/2)\bar{j} + (\sqrt{3}/2)\bar{k}$. Ecuaţiile canonice ale dreptei sunt $\frac{x-7}{1/2} = \frac{y+15}{\sqrt{2}/2} = \frac{z-13}{\sqrt{3}/2}$. b) Vectorul director al dreptei este $\bar{v} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$, deci versorul director este $\overline{v_0} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = (4/5)\bar{i} + (3/5)\bar{j}$. Deci cosinusurile directoare sunt $\cos(\alpha) = 4/5$, $\cos(\beta) = 3/5$¸ $\cos(\gamma) = 0$. c) Fie $\bar{n}_1 = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k}$ vectorul normal la planul $2x - 3y - 3z - 9 = 0$ şi $\bar{n}_2 = \bar{i}$ vectorul normal la planul $x - 7 = 0$. Atunci $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = -3\bar{j} + 3\bar{k}$ este vector director pentru dreapta d_2. Versorul director pentru această dreaptă este $\bar{e} = (-1/\sqrt{2})\bar{j} + (1/\sqrt{2})\bar{k}$. Cosinusurile directoare sunt $\cos(\alpha) = 0$, $\cos(\beta) = -1/\sqrt{2}$¸ $\cos(\gamma) = 1/\sqrt{2}$.

10. Fie planul $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda u - 4v \\ y = 1 - 2u + \mu v \\ z = 1 - \mu u + \lambda v \end{cases}$, $u, v \in \mathbf{R}$. Să se găsească λ şi μ astfel încât planul să fie ortogonal pe vectorul $\bar{v} = \bar{i} + 7\bar{j} + 11\bar{k}$. Să se scrie ecuaţia generală a planului.

R: Comparând cu ecuaţiile (6.3.8), deducem că planul este paralel cu dreptele suport ale vectorilor $\bar{v}_1 = 3\lambda\bar{i} - 2\bar{j} - \mu\bar{k}$ şi respectiv $\bar{v}_2 = -4\bar{i} + \mu\bar{j} + \lambda\bar{k}$. Atunci fiecare din vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ este ortogonal cu vectorul $\bar{v}$. Deci $<\bar{v}, \bar{v}_1> = 0$, $<\bar{v}, \bar{v}_2> = 0$. Obţinem sistemul $3\lambda - 11\mu - 14 = 0$, $11\lambda + 7\mu - 4 = 0$. soluţiile sunt $\lambda = 1$, $\mu = -1$.

11. Să se scrie ecuaţiile dreptei care intersectează două drepte date

d_1: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ şi d_2: $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$ şi care

a) trece prin punctul M(-2, 3, 7).

b) este paralelă cu dreapta d_3: $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

R: a) Fie d dreapta căutată şi fie $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ vectorul ei director. Deoarece d trebuie să intersecteze pe d_1, ele trebuie să fie coplanare. Fie M, $M_1(-3, 5, 0) \in d_1$. Atunci $\bar{v}$, $\overline{MM_1}$ şi $\bar{v}_1 = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ (vectorul director al lui d_1) sunt coplanari.

Similar $\bar{v}$, $\overline{MM_2}$, $M_2(10, -7, 0) \in d_2$ şi $\bar{v}_2 = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ (vectorul director al lui d_2) sunt coplanari. Obţinem $\begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & m & n \\ -12 & 10 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. O soluţie a acestui sistem este l = -1603, m = -2380, n = 847. Ecuaţiile dreptei sunt $\frac{x+2}{-1603} = \frac{y-3}{-2380} = \frac{z-7}{847}$.

b) Dreapta căutată d este paralelă cu d_3 deci $\bar{v} = 8\bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}$ este vectorul ei director. Dreapta d poate fi considerată ca intersecţia a două plane π_1 determinat de dreptele d şi d_1 şi celălalt π_2 determinat de dreptele d şi d_2. Pentru determinarea fiecăruia dintre cele două plane avem câte un punct şi doi vectori necoliniari. Ecuaţiile lor sunt π_1 : $\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 5z - 21 = 0$, π_2 : $\begin{vmatrix} x-10 & y+7 & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y + z + 17 = 0$. Deci dreapta d are ecuaţiile $\begin{cases} -2x+3y-5z-21=0 \\ -x+y+z+17=0 \end{cases}$.

16. Fie punctul M (2, 1, 0) şi planul (P) $2x + 2y + z = 1$. Să se determine:

a) proiecţia lui M pe plan;

b) simetricul lui M faţă de plan;

c) distanţa de la M la (P).

R: a) Dreapta d perpendiculară pe planul P, care trece prin M, are vectorul director $\bar{v} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ şi ecuaţia canonică $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Intersecţia ei cu planul P (proiecţia lui M pe plan) este punctul M\`(8/9, -1/9,-5/9). b) Simetricul lui M faţă de planul $P$ este punctul N(a,b,c) situat pe dreapta $d$ (perpendiculara pe planul $P$ ce conţine pe M) cu proprietatea M\`N=MN (adică M\` este mijlocul lui MN). De aici rezultă (2+a)/2 = 8/9, (1+b)/2 = -1/9, c/2 = -5/9. Avem a = -2/9, b = -11/9, c = -10/9.

c) Folosim formula (6.5.2) şi avem $\delta(M,P) = \frac{|2\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 5/3$.

17. Pe dreapta $d: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$, să se găsească un punct egal depărtat de punctele A (3, 14, 4) şi B (5, -13, -2).

R : Ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt $\begin{cases} x = 15/2 - 5/4\alpha \\ y = -13/2 + 1/4\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Un punct

$M(15/2-5/4\alpha, -13/2+1/4\alpha, \alpha) \in d$ este egal depărtat de punctele A şi B dacă şi numai dacă $\|\overline{MA}\| = \|\overline{MB}\|$, adică dacă $(9/2-5/4\alpha)^2+(1/4\alpha-41/2)^2+(\alpha-4)^2 = (5/2-5/4\alpha)^2+(1/4\alpha+13/2)^2+(\alpha+2)^2 \Leftrightarrow 404-(61/2)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 808/61$.

18. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune şi să se calculeze distanţa dintre dreptele:

$$(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{şi} \quad (d_2): \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

R : Fie $\overline{v}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ vectorul director al lui d_1 şi $\overline{v}_2 = -\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ vectorul director al lui d_2. Fie $M(3, 4, 1) \in d_1$ şi $N(-1, 2, 2) \in d_2$. Atunci $\overline{v} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = 1\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$ este vectorul director al perpendicularei comune d. Ecuaţiile perpendicularei comune d sunt

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Deci $d: \begin{cases} -8x+11y+5z-25=0 \\ -13x-4y-5z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x+9/35}{-1/5} = \dfrac{y-73/35}{-3/5} = \dfrac{z}{1}$.

Distanţa dintre cele două drepte este $\delta(d_1, d_2) = \dfrac{|<\overline{MN}, \overline{v}_1 \times \overline{v}_2>|}{\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|} = 15/\sqrt{35}$ (vezi formula (6.5.3)).

19. Să se arate că dreptele (d_1): $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$ şi (d_2): $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ sunt oarecare în spaţiu şi să se determine distanţa dintre ele.

R: Fie $M(-1, 3, 2) \in d_1$ şi $N(1, 4, 1) \in d_2$. Vectorul liber $\overline{v}_1 = -2\overline{i} + 3\overline{j} + 3\overline{k}$ este vectorul director al lui d_1 şi $\overline{v}_2 = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$ al lui d_2. Avem $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = -3\overline{i} + 10\overline{j} - 12\overline{k}$ şi $\overline{MN} = 2\overline{i} + \overline{j} - 1\overline{k}$. Deoarece $<\overline{MN}, \overline{v}_1 \times \overline{v}_2> \neq 0$, dreptele sunt oarecare. Aplicând formula (6.5.3) obţinem $\delta(d_1, d_2) = \dfrac{|<\overline{MN}, \overline{v}_1 \times \overline{v}_2>|}{\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|} = 16/\sqrt{253}$.

CAPITOLUL 7

CONICE SI CUADRICE

Definiție *Mulțimea* $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{2} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0,\ a_{ij},\ b_i,\ c \in \boldsymbol{R},\ a_{ij} = a_{ji},\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{2} \neq 0\}$ *se numeşte hipercuadrică (sau hipersuprafață) în* $\boldsymbol{R}^n$. *În cazul* $n = 2$ *hipercuadrica se mai numeşte conică iar în cazul* $n = 3$ *se numeşte cuadrică.*

Condiția $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{2} \neq 0$ ne asigură că ecuația ce defineşte hipercuadrica este de gradul al doilea. Dacă $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{2} = 0$, ecuația în discuție este de gradul întâi şi defineşte fie o varietate liniară (mai precis un hiperplan) dacă $c \neq 0$, fie un subspațiu vectorial al lui $\boldsymbol{R}^n$, dacă $c = 0$.

CONICE

7.1. Reducerea la forma canonică

Având în vedere noțiunea de hipercuadrică introdusă mai sus putem da următoarea definiție a conicei. Fie E_2 spațiul punctual euclidian bidimensional (adică $dim_{\mathbf{R}}V_2 = 2$, unde $V_2 = \{\bar{a} \in V_3$, există $A, B \in E_2$ a.î. $\overrightarrow{AB} \in \bar{a}\}$. În acest spațiu considerăm un reper cartezian ortonormat xOy definit de punctul $O \in E_2$ şi o bază canonică $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ a lui V_2 .

Definiţia 7.1.1. *Submulţimea (C) a spaţiul euclidian E_2, formată din toate punctele $M(x,y,z)\in E_2$ ale căror coordonate satisfac ecuaţia*

(7.1.1) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i,j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$,

se numeşte conică. Ecuaţia (7.1.1) este numită ecuaţia generală a conicei. Matricea simetrică $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,3}}$ se va numi matricea conicei (C).

Introducem notaţiile

(***) $$\Delta = \det(A)\ ,\quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\ ,\quad I = a_{11} + a_{22} \text{ şi } \overline{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,2}}\ .$$

În cele ce urmează vom folosi metoda valorilor proprii pentru a determina un reper ortonormat cartezian $\{O`, \vec{i}\,', \vec{j}\,'\}$ faţă de care ecuaţia conicei să aibă forma canonică (sau forma redusă)(a se vedea şi Anexa I).

Metoda valorilor proprii

Considerăm forma pătratică $q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, $a_{12} \neq 0$ care apare în ecuaţia generală a conicei. Se ştie (vezi Teorema 5.2.1) că există o bază ortonormată în $\mathbf{R}^2$ (formată din vectori proprii ai matricei $\overline{A}$) în care forma pătratică q(x, y) are forma canonică $q(x, y) = \lambda_1 x`^2 + \lambda_2 y`^2$, unde λ_i, i = 1,2 sunt valorile proprii (egale sau nu) ale matricei $\overline{A}$.

Se ştie că ecuaţia caracteristică a matricei $\overline{A}$ este $det(\overline{A} - \lambda I) = 0$, sau

(7.1.2) $$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$$

Deoarece $\overline{A}$ este o matrice simetrică, valorile ei proprii sunt reale şi, în consecinţă, ecuaţia de gradul doi de mai sus are rădăcinile λ_1, λ_2 reale.

În continuare vom arăta cum se reduce la forma canonică conica (C) în funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei (7.1.2).

Cazul I. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci discriminantul Δ_c al ecuaţiei caracteristice este în mod necesar nul, adică $I^2 - 4\delta = 0$. Deducem că $(a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{12})^2 = 0 \Leftrightarrow$ "$a_{11} = a_{22}$ şi $a_{12} = 0$". În acest caz avem $a_{11} \neq 0$ (altfel nu este îndeplinită condiţia $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$) şi ecuaţia conicei devine

$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \Leftrightarrow a_{11}(x + a_{13}/a_{11})^2 + a_{11}(y + a_{23}/a_{11})^2 + a_{33} - (a_{13}/a_{11})^2 - (a_{23}/a_{11})^2 = 0.$

Efectuând translaţia $x` = x + a_{13}/a_{11}$, $y` = y + a_{23}/a_{11}$, obţinem ecuaţia *redusă* a conicei:

$a_{11}x`^2 + a_{11}y`^2 + a`_{33} = 0,$

unde $a`_{33} \overset{not}{=} a_{33} - (a_{13})^2/a_{11} - (a_{23})^2/a_{11}$.

Deci, faţă de noul reper cartezian definit de punctul $O`(- a_{13}/a_{11}, - a_{13}/a_{11})$ şi aceeaşi bază canonică $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ a lui V_2, conica este în formă redusă.

Cazul al II-lea. Dacă ecuaţia (7.1.2) are două rădăcini distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci fie $\bar{v}_1$, respectiv $\bar{v}_2$, vectorii proprii corespunzători celor două rădăcini. Versorii proprii $\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \alpha_1\bar{i} + \beta_1\bar{j}$ şi $\bar{e}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \alpha_2\bar{i} + \beta_2\bar{j}$ formează o bază ortonormată în V_2. Presupunem că aceştia au fost astfel aleşi încât matricea $R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, de trecere de la baza $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ la baza $B` = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, să definească o rotaţie (vezi Definiţia 6.2.1).

Se cunoaşte faptul că R este o matrice ortogonală (vezi Propoziţia 4.4.1 pct. 6). Deci ar fi suficient ca versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ să fie aleşi astfel încât *det*(R) = + 1. Dacă această condiţie nu este îndeplinită, atunci înmulţim unul din versori cu *-1* sau îi renumerotăm (pe ei şi implicit valorile proprii

corespunzătoare) şi condiţia va fi îndeplinită. Schimbarea de coordonate corespunzătoare acestei rotaţii de centru O este $\begin{pmatrix} x` \\ y` \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sau, echivalent, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} x` \\ y` \end{pmatrix}$, unde noul reper cartezian este $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

În urma acestei schimbări de coordonate, ecuaţia (7.1.1) devine

(7.1.3) $\lambda_1 x`^2 + \lambda_2 y`^2 + 2a`_{13}x` + 2a`_{23}y` + a_{33} = 0$, unde $a`_{13} = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1$, $a`_{23} = a_{13}\alpha_2 + a_{23}\beta_2$.

(i) Dacă $\lambda_1 \neq 0$ şi $\lambda_2 \neq 0$, procedăm ca în cazul I. Astfel, efectuând translaţia $x`` = x` + a`_{13}/\lambda_1$, $y`` = y` + a`_{23}/\lambda_2$ obţinem forma redusă

(7.1.4) $$\lambda_1 x``^2 + \lambda_2 y``^2 + a``_{33} = 0,$$

unde $a``_{33} \overset{not}{=} a_{33} - (a`_{13})^2/\lambda_1 - (a`_{23})^2/\lambda_2$.

(ii) Dacă una din soluţiile λ_1 sau λ_2 este zero, atunci forma redusă se obţine tot în urma unei translaţii. Presupunem că $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

ii$_a$). Dacă $a`_{23} \neq 0$, efectuăm translaţia $x`` = x` + a`_{13}/\lambda_1$, $y`` = y` + A``_{33} / (2a`_{23})$, $A``_{33} \overset{not}{=} a_{33} - (a`_{13})^2/\lambda_1$ şi obţinem forma redusă

(7.1.5) $\lambda_1 x``^2 + 2a`_{23}y`` = 0$.

ii$_b$) În cazul în care $a`_{23} = 0$, efectuăm translaţia $x`` = x` + a`_{13}/\lambda_1$, $y`` = y`$ şi forma redusă este $\lambda_1 x``^2 + A``_{33} = 0$. Cazul $\lambda_2 \neq 0$ se tratează analog.

Observaţia 7.1.1 a) În cazul I, matricea asociată formei reduse a conicei (C) este $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a`_{33} \end{pmatrix}$. Notăm cu $\Delta`$, $\delta`$, $I`$ numerele definite de (***) pentru matricea D. Ţinând cont de relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei de gradul al doilea (7.1.2), obţinem $\delta` = (a_{11})^2 = \delta$ şi $I` = 2a_{11} = I$. Pe de altă parte, $\Delta` = (a_{11})^2 a`_{33} = (a_{11})^2 [a_{33} - (a_{13})^2/ a_{11} - (a_{23})^2/$

$a_{11}] = \Delta$. Deci, în urma translaţiei, valorile $\Delta`$, $\delta`$, I` rămân egale cu cele iniţiale Δ, δ, I.

b) În cazul al II-lea avem subcazurile

i) Dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, atunci conica (C), în forma redusă, are matricea $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a``_{33} \end{pmatrix}$(vezi relaţia (7.1.4)).

Raţionând ca mai sus avem $\delta` = \lambda_1\lambda_2 = \delta$, $I` = \lambda_1 + \lambda_2 = I$.

Mai departe, obserăm că matricea de rotaţie $R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ poate fi scrisă $\begin{pmatrix} co\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, $\phi \in [0,2\pi)$. Într-adevăr, dacă $\bar{e}_1 = \cos\phi\bar{i} + \sin\phi\bar{j}$ şi $\bar{e}_2 = \cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}$, $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$ din condiţia $\det(R) = +1$ rezultă uşor că $\theta - \phi = \pi/2$. De aici rezultă concluzia.

Cum $\bar{e}_1$ este vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1, deducem că $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $\lambda_1 = a_{11} + a_{12}\, tg\phi = a_{22} + a_{12}\, ctg\phi$ dacă $\cos\phi, \sin\phi \neq 0$. Analog, $\lambda_2 = a_{11} - a_{12}\, ctg\phi$ dacă $\sin\phi \neq 0$. De aici rezultă şi formulele

$$ctg(2\phi) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{7.1.6}$$

$$\frac{1 + tg^2\phi}{tg\phi} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} \tag{7.1.6`}$$

În concluzie, $\Delta` = \lambda_1\lambda_2 a``_{33} = \lambda_1\lambda_2[a_{33} - (a`_{13})^2/\lambda_1 - (a`_{23})^2/\lambda_2]$, dacă $\cos\phi, \sin\phi \neq 0$. Ţinând cont de relaţiile (7.1.6), (7.1.6`) şi de faptul că $a`_{13} = a_{13}\cos\phi + a_{23}\sin\phi$, $a`_{23} = -a_{13}\sin\phi + a_{23}\cos\phi$ şi $\lambda_1\lambda_2 = \delta$, obţinem

$\Delta` = \delta\, a_{33}$ - (a_{11} - a_{12} $ctg\phi$)(a_{13} $cos\phi$ + a_{23} $sin\phi)^2$ – (a_{11} + a_{12} $tg\phi$)(- a_{13} $sin\phi$ + $a_{23}cos\phi)^2$ = $\delta\, a_{33}$ - a_{11} $(a_{13})^2$ + $2a_{12}(a_{13})^2cgt2\phi$ - a_{11} $(a_{23})^2$ + 2 a_{11} a_{13} a_{23} = Δ + a_{22} $(a_{13})^2$ + $2a_{12}(a_{13})^2cgt2\phi$ - a_{11} $(a_{23})^2$.

Deci $\Delta` = \Delta + (a_{22} - a_{11})(a_{13})^2 + 2a_{12}(a_{13})^2cgt2\phi$.

Aplicând din nou formula (7.1.6), rezultă că suma ultimilor doi termeni din membrul drept al formulei de mai sus este zero şi $\Delta` = \Delta$.

Dacă $cos\phi = 0$ sau $sin\phi = 0$, demonstraţia este imediată fiind lăsată ca exerciţiu pentru cititori. Acum vom discuta cazul ii).

ii$_a$. Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ şi $a`_{23} \neq 0$, atunci matricea asociată formei reduse a conicei *(C)* este $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a`_{23} \\ 0 & a`_{23} & 0 \end{pmatrix}$(vezi relaţia (7.1.5)). În mod evident $\delta`$ = δ = 0, $\Gamma`$ = $\lambda_1$ = I. Observăm că $\Delta` = -\lambda_1(a`_{23})^2$ . Observăm că $\bar{e}_2 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}}\bar{i} - \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}}\bar{j}$ este un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2$. Atunci $a`_{23} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{23}a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}}$ şi, cum $(a_{12})^2 = a_{11}a_{22}$, avem $\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2} = \sqrt{a_{11}a_{11} + a_{11}^2}$ şi $(a`_{23})^2 = \frac{a_{11}[a_{22}(a_{13})^2 + (a_{23})^2 a_{11} - 2a_{12}a_{13}a_{23}]}{a_{11}(a_{22} + a_{11})}$ = - $\Delta/I$ . Acum este clar că $\Delta` = -\lambda_1(a`_{23})^2 = (-I)(-\Delta/I) = \Delta$.

ii$_b$. Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ şi $a`_{23} = 0$, atunci, pentru acelaşi versor ales mai sus, avem $a_{12}a_{13} = a_{11}a_{23}$ şi rezultă $\Delta = 0$. Deci $\Delta` = \Delta = 0$.

c) Dacă forma pătratică q(x, y) este în formă canonică, adică $a_{12} = 0$, nu este nevoie de rotaţie, forma redusă se obţinându-se în urma unei translaţii. Exerciţiu: Arătaţi că şi în acest caz valorile Δ , δ, I rămân neschimbate în urma translaţiei..

Rezultatele de mai sus sunt rezumate în teorema următoare.

Teorema 7.1.1. *a) Pentru orice conică (C), există un reper cartezian ortonormat x``Oy`` față de care conica are forma redusă*

$$\lambda_1 x^{``2} + \lambda_2 y^{``2} + a^{``}_{33} = 0$$

b) Numerele Δ , δ , I *definite de relația (***) sunt invariante la translații şi rotații, adică* $\Delta' = \Delta$, $\delta' = \delta$, $I' = I$, *unde* $\Delta`$, $\delta`$, $I`$ *sunt cantitățile definite de (***) pentru matricea asociată conicei în reperul x``Oy``.*

Demonstrație. Punctul a) a fost demonstrat mai sus. Veridicitatea afirmațiilor de la punctul b) a fost dovedită în cazul particular al rotațiilor şi translațiilor folosite în demonstrația punctului a) (vezi Observația 7.1.1. b)). Cazul unei rotații, respectiv translații, oarecare poate fi tratat asemănător. Pentru o demonstrație completă cititorul poate consulta [6].

Numerele Δ , δ , I se numesc invarianții conicei: Δ este numit *invariantul cubic,* δ - *invariantul pătratic* şi I - *invariantul liniar* .

Definiția 7.1.2. *Se numeşte centru al conicei (C) un centru de simetrie al mulțimii punctelor de pe conica (C)* .

Mulțimea punctelor din plan de pe conica *(C)* poate avea sau nu un centru de simetrie.

Dacă conica *(C)* ar fi caracterizată analitic de o ecuație de forma $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k = 0$, atunci originea reperului ar fi centru de simetrie al conicei. Geometric, originea reperului este centru de simetrie dacă şi numai dacă simetricul unui punct oarecare M(x, y) de pe conică, față de origine, este tot pe conică. Analitic acest lucru se reduce la condiția $f(x, y) = f(-x, -y)$, unde $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k$.

În cele ce urmează ne propunem să determinăm condiţiile în care conica (generală) *(C)* admite centru de simetrie şi ,în caz afirmativ, să găsim acest centru. Convenim să notăm cu *f*(x, y) funcţia definită de membrul stâng al ecuaţiei (7.1.1)

Presupunem că (*C*) are centrul de simetrie $C_0(x_o,y_o) \in E_2$. Efectuând translaţia reperului $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ în punctul C_0, obţinem reperul $\{C_0,\vec{i},\vec{j}\}$ faţă de care un punct oarecare $M(x, y)\in E_2$ va avea coordonatele (x`, y`), date de relaţiile:

(7.1.7)
$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

În noul reper, ecuaţia (7.1.1) se scrie

(7.1.8)
$$a_{11}x^{`2} + 2a_{12}x^{`}y^{`} + a_{22}y^{`2} + 2(a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13})x^{`} +$$
$$+ 2(a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23})y^{`} + f(x_o,y_o) = 0$$

Notând cu g(x, y) funcţia din membrul stâng ecuaţiei (7.1.8) şi impunând condiţia de simetrie, *g*(x`,y`) = g(-x`,-y`) obţinem:

(7.1.9)
$$\begin{cases} a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} f_x'(x_0,y_0) = 0 \\ f_y'(x_0,y_0) = 0 \end{cases}.$$

Ecuaţiile (7.1.9) reprezintă ecuaţiile centrului C_0 al unei conice (bineînţeles, dacă acesta există). Avem cazurile:

a) $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Atunci sistemul (7.1.9) are soluţie unică şi punctul $C_0(x_o,y_o)$ este centrul conicei *(C);*

b) $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$. Sistemul (7.1.9) nu are soluţie sau admite o infinitate de soluţii şi conica *(C)* nu are centru unic la distanţă finită.

7. 2. Reducerea la formă canonică a conicelor cu centru, $\delta \neq 0$

În secțiunea precedentă am văzut că orice conică poate fi adusă la forma canonică prin rotații şi/sau translații.

În cazul conicelor cu centru în punctul $C_0(x_0, y_0)$, se efectuează translația reperului $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ în punctul $C_0(x_o,y_o)$ (dată de ecuațiile (7.1.7)) şi ecuația conicei devine

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + k = 0 \quad , \quad k = f(x_o,y_o).$$

Propoziția 7.2.1. *Constanta k din ecuația de mai sus se poate calcula fără a cunoaşte coordonatele centrului $C_0(x_o,y_o)$ al conicei. Valoarea ei este Δ/δ.*

Demonstrație. Avem $k = f(x_o,y_o) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}x_0) + y_0(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}x_0) + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$.

Având în vedere (7.1.9), deducem că $f(x_o,y_o) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$. Tot din (7.1.9) rezultă că $x_0 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}/\delta$ şi $y_0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}/\delta$ şi înlocuind în formula lui $f(x_o,y_o)$ rezultă $f(x_o,y_o) = \Delta/\delta$. Deci $k = \Delta/\delta$ şi, în mod clar, aflarea lui k nu este condiționată de rezolvarea sistemului (7.1.9).

După ce s-a efectuat translația descrisă prin ecuațiile (7.1.7) se procedează aşa cum am arătat în secțiunea 7.1. Concret, se parcurg paşii următori:

Pasul I. Se calculează invarianții conicei şi se scrie ecuația $\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$, numită *ecuație seculară*;

Pasul al-II-lea. a) Dacă ecuaţia seculară are rădăcini egale, atunci, aşa cum am văzut în secţiunea 7.1, nu mai este necesară rotaţia pentru a aduce conica la forma canonică. Conica este deja în formă redusă.

b) Dacă ecuaţia seculară are rădăcinile diferite λ_1, λ_2, atunci se calculează versorii proprii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2 astfel încât matricea R de trecere de la baza $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ la baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, să definească o rotaţie. Se efectuează rotaţia şi se obţine forma canonică

(7.2.1) $$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \Delta/\delta = 0$$

a conicei *(C)*.

Facem observaţia că matricea de rotaţie R = $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ poate fi scrisă $\begin{pmatrix} \mathrm{co}\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, unde unghiul ϕ este dat de relaţia (7.1.6). În acest caz nu mai este necesară determinarea versorilor proprii.

Observaţia 7.2.1. a) In cazul conicelor cu centru, forma canonică (7. 2.1) se poate scrie cunoscând numai invarianţii acesteia: Δ, δ şi I .

b) În reducerea la formă canonică a ecuaţiei unei conice cu centru, nu contează ordinea efectuării izometriilor (respectiv translaţia în centrul conicei şi rotaţia).

c) Axele de coordonate Cx'' şi Cy'' sunt axe de simetrie pentru conica *(C)*, adică reperul $\{C, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este reperul în care conica este caracterizată printr-o ecuaţie redusă (ecuaţie în care conica poate fi recunoscută.)

Dacă ϕ este unghiul cu care este rotit în sens trigonometric reperul $\{C, \bar{i}, \bar{j}\}$, pentru a obţine reperul $\{C, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, şi $\phi \neq 0, \pi/2, 3\pi/2,$ atunci pantele acestor axe de simetrie sunt $m_1 = \mathrm{tg}\phi$ şi respectiv $m_2 = -\mathrm{ctg}\phi$. Ştim deja că

$m_1 + m_2 = ctg2\phi = (a_{22} - a_{11})/a_{12}$ şi , evident, $m_1m_2 = -1$. De aici rezultă că m_1, m_2 sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea

(7.2.2) $$a_{12}\, m^2 + (a_{11} - a_{22})\, m - a_{12} = 0,$$

numită *ecuaţia pantelor* axelor de simetrie ale unei conice nedegenerate cu centru la distanţă finită. Acum, ecuaţiile axelor conicei pot fi scrise uşor, deoarece acestea sunt drepte care trec prin centrul $C(x_o,y_o)$ şi au pantele m_1 şi m_2, soluţii ale ecuaţiei (7.2.2).

d) Analizând forma canonică (7.2.1), distingem următoarele situaţii:

Cazul **1°** $\Delta \neq 0$

a) $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \delta > 0$ şi ecuaţia (7.2.1) poate fi pusă sub una din formele : $\frac{x``^2}{a^2} + \frac{y``^2}{b^2} - 1 = 0$ sau $\frac{x``^2}{a^2} + \frac{y``^2}{b^2} + 1 = 0$, a,b >0. Conica este fie o elipsă reale, fie mulţimea vidă.

b) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \delta < 0$ şi ecuaţia (7.2.1) poate fi pusă sub una din formele : $\frac{x``^2}{a^2} - \frac{y``^2}{b^2} - 1 = 0$ sau $\frac{x``^2}{a^2} - \frac{y``^2}{b^2} + 1 = 0$, a,b >0. În acest caz conica *(C)* reprezintă o hiperbolă. Dacă $I = a_{11} + a_{22} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$, adică a = b, hiperbola este echilateră .

Cazul **2°** $\Delta = 0$

a) $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \delta > 0$ şi ecuaţia se scrie sub forma $\alpha^2 x``^2 + \beta^2 y``^2 = 0$. Conica se reduce la un punct, centrul $C_0(x_o,y_o)$.

b) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \delta < 0$, ecuaţia (7.2.1) poate fi pusă sub forma

$\alpha^2 x``^2 - \beta^2 y``^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha x`` - \beta y``)(\alpha x`` + \beta y``) = 0$. Conica reprezintă două drepte concurente .

Deci, invariantul cubic Δ ne oferă informaţii despre natura conicei, iar invariantul pătratic δ ne dă informaţii despre genul conicei *(C)*. Astfel, vom spune:

dacă $\Delta \neq 0$, atunci *conica este nedegenerată*, iar

dacă $\Delta = 0$, *conica este degenerată.*

Dacă

$\delta > 0$ - conica *(C)* este de gen elipsă, iar dacă

$\delta < 0$ - conica *(C)* este de gen hiperbolă .

Exemplul 7.2.1. *Să se aducă la forma canonică conica (C): $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.*

Matricea conicei este $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$ *iar invarianţii ei sunt $\Delta = -81$, $\delta = 9$, $I = 10$. Deoarece $\delta = 9 \neq 0$, conica are centru $C(x_o, y_o)$, coordonatele centrului fiind soluţiile sistemul* $\begin{cases} 10x_o + 8y_o - 18 = 0 \\ 8x_o + 10y_o - 18 = 0 \end{cases}$.

Deducem că $x_o = y_o = 1$. Efectuăm translaţia definită de ecuaţiile (7.1.7) şi aplicând Propoziţia 7.2.1 rezultă că ecuaţia conicei în reperul cartezian $\{C, \bar{i}, \bar{j}\}$ $(x`Cy`)$ este

$5x`^2 + 8x`y` + 5y`^2 - 81/9 = 0$.

Ecuaţia seculară este $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$ şi are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. Versorii proprii corespunzători lui λ_1 şi λ_2, aleşi astfel încât să definească o rotaţie, sunt $\bar{e}_1$

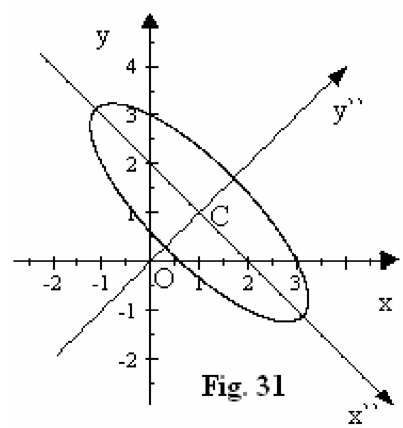


Fig. 31

$= 1/\sqrt{2}\,\bar{i} - 1/\sqrt{2}\,\bar{j}$ şi $\bar{e}_2 = 1/\sqrt{2}\,\bar{i} + 1/\sqrt{2}\,\bar{j}$. Efectuăm rotaţia $\begin{pmatrix} x` \\ y` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x`` \\ y`` \end{pmatrix}$ *şi deducem că, în reperul $\{C, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}(x``Cy``)$,*

conica are forma canonică $x''^2 + 9y''^2 - 9 = 0$. *Reprezentarea grafică a conicei este realizat în Fig. 31. Conica este o elipsă (vezi Anexa I pentru definiția şi proprietățile elipsei).*

Observăm că am fi putut calcula direct unghiul de rotație folosind relația (7.1.6). S-ar fi obținut $ctg2\phi = 0$. *Dacă alegem* $\phi = 7\pi/4$, *din relația (7.1.6`), rezultă că* $sign(\lambda_1 - \lambda_2) = - \ sign\ (a_{12})$, *deci* $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, *adică numerotarea valorilor proprii corespunde rotației de unghi* $\phi = 7\pi/4$ *şi obținem aceeaşi formă canonică ca mai sus. Reamintim că forma canonică poate fi diferită dacă alegem o altă bază şi implicit un alt unghi de rotație. De exemplu dacă alegeam* $\phi = \pi/4$ *atunci relația (7.1.6`) conduce la inegalitatea* $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, *ceea ce înseamnă că valorile proprii trebuie renumerotate. Deci rotind reperul* $\{C, \bar{i}, \bar{j}\}$ *în sens trigonometric cu unghiul* $\phi = \pi/4$ *am fi obținut reperul XCY în care conica ar fi avut forma redusă* $9X^2 + Y^2 - 9 = 0$. *Evident reprezentarea grafică a conicei rămâne cea din Fig. 31.*

7.3. Reducerea la forma canonică a conicelor fără centru (unic), $\delta = 0$

Reamintim că în cazul $\delta = 0$ sistemul (7.1.9) este incompatibil sau admite o infinitate de soluții, adică conica (7.1.1) nu admite un unic centru de simetrie sau conica admite o infinitate de centre de simetrie.

În acest caz, nu există o translație care să ne conducă la o ecuație de gradul al doilea fără termeni de gradul întâi. Aşa cum am arătat în secțiunea 7.1, întâi se efectuează o rotație, cu originea O ca punct fix, după care efectuăm o translație şi obținem forma canonică (vezi ecuația (7.1.5) ca exemplu).

În cazul $\delta = 0$, ecuaţia seculară λ^2 - Iλ = 0 are rădăcinile $\lambda_1 = I$ şi $\lambda_2 = 0$. În urma rotaţiei indicate în secţiunea 7.1 se obţine ecuaţia (7.1.3). Scriind ecuaţia (7.1.3) pentru valorile λ_1 şi λ_2 indicate mai sus, avem

(*) $$Ix`^2 + 2a`_{13}x` + 2a`_{23}y` + a_{33} = 0.$$

Observăm că $\Delta = - I(a`_{23})^2$, conform Teoremei 7.1.1. Distingem cazurile:

Cazul **1°** $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a`_{23} \neq 0$. Efectuăm translaţia $x`` = x` + a`_{13}/\lambda_1$, $y`` = y` + A``_{33} / a`_{23}$, $A``_{33} \overset{not}{=} a_{33} - (a`_{13})^2/\lambda_1$ şi punctul O este translatat în punctul V de coordonate $x`_V = -a`_{13}/\lambda_1$, $y`_V = - A``_{33} / a`_{23}$. ( Coordonatele punctului V, în reperul xOy, sunt date de ecuaţia $\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} -a`_{13}/\lambda_1 \\ -A``_{33}/a`_{23} \end{pmatrix}$.)

Ecuaţia conicei capătă forma canonică (7.1.5) sau, echivalent, $(x``)^2 = 2p\,y``$, unde $p = - a`_{23}/I$. Ţinând cont de faptul că $\Delta = - I(a`_{23})^2$, deducem că $p = \pm\sqrt{\dfrac{-\Delta}{I^3}}$. Am obţinut forma redusă

(7.3.1) $$(x``)^2 = 2p\,y``,\ p = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}}\,.$$

Conica (7.3.1), raportată la reperul $\{V, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este o parabolă cu vârful în punctul V. Dreapta V y`` este axa de simetrie a parabolei, iar dreapta V x`` este tangenta în V la aceasta.

Cazul **2°** $\Delta = 0 \Leftrightarrow a'_{23} = 0$. Ecuaţia (*) se scrie

(7.3.2) $$I\,x'^2 + 2a'_{13}x` + a'_{33} = 0.$$

Aceasta este o ecuaţie de gradul al doilea în x' cu rădăcinile k_1 şi k_2 , reale sau complexe şi discriminantul $\Delta_e = (a'_{13})^2 - 4I\,a'_{33}$. Forma canonică a ecuaţiei (7.3.2) este $\left(x' + \dfrac{a'_{13}}{2I}\right)^2 - \dfrac{\Delta_e}{4I^2} = 0$

a) dacă ecuaţia (7.3.2) are rădăcini reale (adică $\Delta_e \geq 0$), atunci efectuăm translaţia $x' + \frac{a'_{23}}{2I} = x``$ şi notând $\Delta_e/(4I^2) = -k^2$, obţinem următoarea forma canonică a conicei.

(7.3.3) $$(x``)^2 - k^2 = 0.$$

Dacă $k \neq 0$, conica se reduce la două drepte strict paralele: $x`` = k$, $x`` = -k$. Dacă $k = 0$, ecuaţia (7.3.3) defineşte două drepte paralele confundate.

b) dacă ecuaţia (7.3.2) are rădăcini complexe ($\Delta_e < 0$), atunci conica *(C)* este reprezentată în plan de către mulţimea vidă .

Vom spune că acele conice pentru care $\delta = 0$ sunt de *gen parabolă*.

Observaţia 7.3.1. Dacă $\vec{e}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 0$, atunci $\begin{cases} a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_2 = 0 \end{cases}$. Fie θ este unghiul dintre $\vec{e}_2$ şi $\bar{j}$. Panta *m* a axei parabolei este dată de formula

(7.3.4) $$m = \operatorname{tg}\theta = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Exemplul 7.3.1 *Să se aducă la forma canonică conica $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$.*

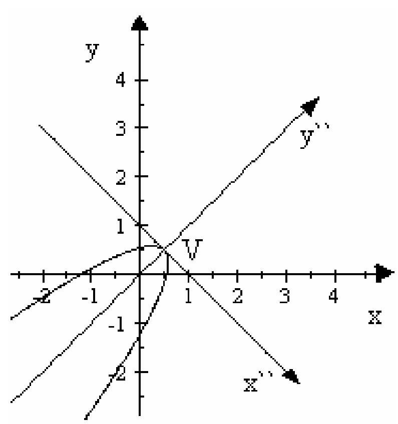


Fig. 32

Matricea asociată conicei este $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ şi invarianţii sunt $\Delta = -12$, $\delta = 0$, $I = 6$. Ecuaţia seculară, $\lambda^2 - 6\lambda = 0$, are rădăcinile $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 0$. Vectorii proprii corespunzători sunt $\bar{e}_1 = 1/\sqrt{2}\,\bar{i} - 1/\sqrt{2}\,\bar{j}$ şi $\bar{e}_2 = 1/\sqrt{2}\,\bar{i} + 1/\sqrt{2}\,\bar{j}$.

Efectuăm rotaţia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *şi deducem că, în reperul {O,* $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$*}, conica are forma canonică* $6x'^2 + 2\sqrt{2}\, y' - 2 = 0$*. Efectuăm şi translaţia* $x'' = x'$, $y'' = y' - \sqrt{2}/2$ *şi obţinem forma canonică* $x''^2 = -(\sqrt{2}/3)\, y''$*. Conica este o parabolă cu vârful în V(1/2, 1/2) (coordonatele lui V sunt date faţă de reperul xOy). Panta axei parabolei este m= -1(vezi relaţia (7.3.4)). Se observă că forma canonică (redusă) a conicei se putea obţine direct folosind ecuaţia (7.3.1). Într-adevăr,* $p = \pm\sqrt{-(-12)/6^3} \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{2}/6$ *şi forma canonică a conicei este* $x''^2 = -(\sqrt{2}/3)\, y''$ *dacă alegem* $p = \sqrt{2}/6$*.*

Încheiem această primă parte a capitolului 7 cu următoarea clasificare a conicelor, clasificare în care rolul principal îl joacă invarianţii Δ, I şi δ:

Δ (natura)	δ (genul)	Discuţie
$\Delta \neq 0$ conice nedegenerate	$\delta > 0$	elipsă reală , pentru $I\Delta < 0$
		mulţimea vidă , pentru $I\Delta > 0$
	$\delta = 0$	parabolă
	$\delta < 0$	hiperbolă
$\Delta = 0$ conice degenerate	$\delta > 0$	punct dublu
	$\delta = 0$	pereche de drepte (paralele sau confundate) sau mulţimea vidă
	$\delta < 0$	pereche de drepte concurente

CUADRICE

7.4. Cuadrice date prin ecuații reduse

În spațiul punctual euclidian E_3 considerăm reperul ortonormat $\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$. Reamintim că distanța dintre două puncte din spațiu, $M(x_1,y_1,z_1)$ şi respectiv $N(x_2,y_2,z_2)$, este

$$\delta(M,N) = \left\|\overline{MN}\right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

7.4.1. Sfera

Fie $C\ (a, b, c)\in E_3$ un punct fixat .

Definiția 7.4.1. *Se numeşte sferă de centru C şi rază* $r\in$ **R**, *mulțimea punctelor* $M \in E_3$ *cu proprietatea* $\delta(M,C) = R$.

Mulțimea punctelor $M(x, y, z) \in E_3$, care aparțin sferei (S) de centru C(a,b,c) şi rază R, satisfac relația :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{7.4.1}$$

numită *ecuația carteziană implicită a sferei.* Folosind coordonatele sferice ale punctului $M \in (S)$ față de reperul cartezian $\{C;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ şi definiția sferei, obținem ecuațiile

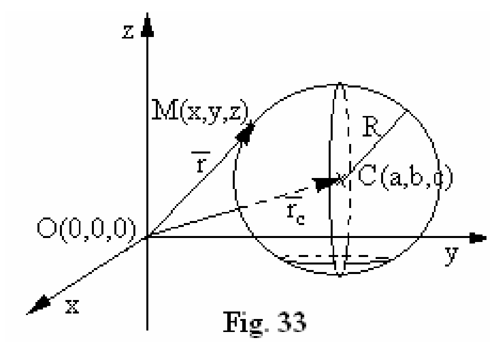


Fig. 33

$$\begin{cases} x = a + R\sin\varphi\cos\theta \\ y = b + R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c + R\cos\varphi \end{cases} \tag{7.4.2}$$

unde $\theta\in[0,2\pi)$, $\varphi\in[0,\pi)$ şi R este raza sferei. Aceste ecuații se numesc ecuațiile parametrice ale sferei (S).

Fie $\bar{r}$, respectiv $\overline{r_c}$, vectorul de poziţie al punctului M de pe sferă, respectiv al centrului sferei. Atunci ecuaţia vectorială a sferei este:

$$\bar{r} = \overline{r_c} + r\sin\varphi\cos\theta\,\bar{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\bar{j} + r\cos\varphi\,\bar{k} \text{ în } V_3.$$

Pe de altă parte, ecuaţia (7.4.1) este echivalentă cu ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0.$$

Aceasta ne sugerează studiul ecuaţiei generale

(7.4.3) $\qquad x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0,$

numită *ecuaţia carteziană generală a sferei sub formă normală.*

Dacă notăm m = A/2, n = B/2, p = C/2, l= D - $m^2 - n^2 - p^2$, ecuaţia (7.4.3) poate fi scrisă sub forma $x^2 + 2m\,x + m^2 + y^2 + 2ny + n^2 + z^2 + 2pz + p^2 + l = 0$.

Restrângând pătratele, obţinem $(x+m)^2 + (z+n)^2 + (y+p)^2 + l = 0$.

Distingem următoarele cazuri

a) dacă $l < 0$, atunci există $R > 0$ astfel încât $l = -R^2$, caz în care am obţinut ecuaţia carteziană a unei sfere cu centrul C(-m,-n,-p) şi rază R.

b) dacă $l > 0$, atunci, în mod evident, nu există nici un triplet $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ care să verifice ecuaţia în discuţie. Deci ecuaţia reprezintă mulţimea vidă.

c) dacă $l = 0$ atunci ecuaţia *generală a sferei* caracterizează un singur punct C(-m,-n,-p).

Planul tangent într-un punct la o sferă.

Planul care un singur punct comun cu sfera este numit planul tangent la sferă în acest punct.

Fie M_o un punct pe sfera de centru C(a,b,c) şi rază R, dată de ecuaţia (7.4.1). Punctul M(x,y,z) este situat în planul tangent la sferă în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0) \in (S)$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{M_oM}$ este ortogonal vectorului $\overrightarrow{CM}_o(x_o-a, y_o-b, z_o-c)$, adică $(x-x_o)(x_o-a) + (y-y_o)(y_o-b) + (z-z_o)(z_o-c) = 0$.

Ecuaţia de mai sus se numeşte ecuaţia planului tangent la sferă în punctul M_o şi se scrie sub forma:

(7.4.4) $xx_o + yy_o + zz_o - a(x + x_o) - b(y + y_o) - c(z + z_o) + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-c)(z_0-c) - R^2 = 0.$

Se observă că ecuaţia (7.4.4) se obţine prin dedublarea ecuaţiei (7.4.1). Procedând asemănător, obţinem ecuaţia planului tangent în punctul M_0 la sfera (S) definită de ecuaţia (7.4.3). Avem

$$xx_0 + yz_0 + zy_0 + (A/2)(x + x_0) + (B/2)(y + y_0) + (C/2)(z + z_0) + D = 0.$$

Observaţia 7.4.1. Dacă (S) este sfera de centru C şi rază R şi d este distanţa de la centrului sferei la planul *(P)*, atunci avem următoarele cazuri :

- $d < r$ - planul *(P)* este secant sferei (S)
- $d = r$ - planul *(P)* este tangent sferei (S)
- $d > r$ - planul *(P)* este exterior sferei (S) .

7.4.2. Elipsoidul

Definiţia 7.4.2. *Se numeşte elipsoid, o suprafaţă (cuadrică) (E) pentru care există un reper cartezian Oxyz faţă de care ecuaţia suprafeţei este*

(7.4.5) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \text{ unde } a,b,c > 0.$$

Ecuaţia (7.4.5) se mai numeşte şi ecuaţia canonică (redusă) a cuadricei de tip elipsoid. Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului sunt

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\cos\varphi \end{cases}, \text{ unde } \theta \in [0,2\pi),\ \varphi \in [0, \pi).$$

Pentru a reprezenta grafic elipsoidului, vom studia intersecţiile acestuia cu plane de coordonate xOy, xOz şi yOz. Intersecţia elipsoidului

cu planul xOy este elipsa $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ de semiaxe *a, b*. Asemănător, se arată că intersecţiile cu planele xOz şi yOz sunt elipsele $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ şi respectiv $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$ (vezi Fig.34).

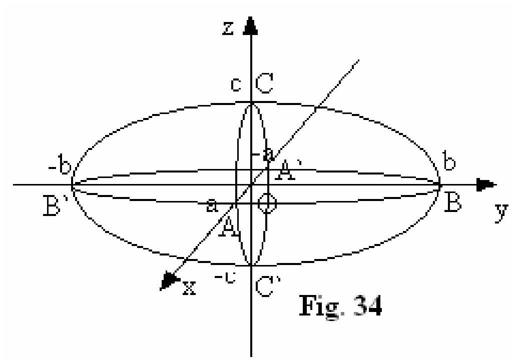


Fig. 34

Planele de coordonate (plane principale) sunt plane de simetrie ale elipsoidului, axele de coordonate sunt axe de simetrie, iar segmentele de pe axele de coordonate de lungime egale cu *a, b* şi respectiv *c* sunt numite semiaxe.

Intersecţiile elip-soidului cu axele de simetrie vor fi numite vârfuri. Dacă două semiaxe sunt egale, vom obţine un elipsoid de rotaţie, iar pentru $a = b = c$ se obţine sfera.

Originea reperului cartezian este centru de simetrie pentru mulţimea punctelor elipsoidului şi se numeşte centrul elipsoidului.

7.4.3 Hiperboloizii

Definiţia 7.4.3. *Se numeşte hiperboloid cu o pânză, suprafaţa (cuadrica) (H_1) pentru care există un reper cartezian Oxyz faţă de care ecuaţia acesteia este*

(7.4.6) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \text{ unde } a, b, c > 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu o pânză definit de ecuaţia (7.4.6) sunt următoarele:

$$\begin{cases} x = a\,ch u \cos v \\ y = b\,ch u \sin v \\ z = c\,sh u \end{cases},\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0,2\pi).$$

Intersecţiile hiperboloidului ($\boldsymbol{H_1}$) cu planele $\pi_\alpha \| xOy$, $\pi_\beta \| xOz$ şi $\pi_\gamma \| yOz$, caracterizate de ecuaţiile $z = \alpha$, $y = \beta$ şi respectiv $x = \gamma$, sunt curbele date de ecuaţiile: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ (elipse), $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \beta \end{cases}$ şi respectiv $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{\gamma^2}{a^2} - 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$, (hiperbole).

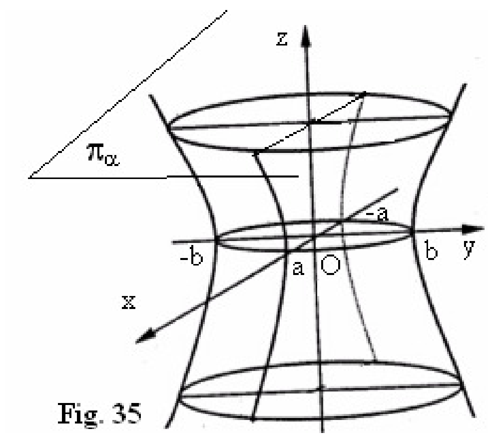


Fig. 35

Se observă că ecuaţia elipselor determinate de intersecţia hiperboloidului cu planele $\pi_\alpha \| xOy$ se mai scrie sub forma:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 + 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 + 1}\right)^2} = 1.$$

De aici se deduce că semiaxele elipselor cresc atunci când distanţa dintre planul π_α şi planul xOy creşte (vezi Fig. 35).

Hiperboloidul cu o pânză are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul. Axa netransversală a hiperboloidului (7.4.6) este axa Oz. Elipsa obţinută prin intersecţia hiperboloidului cu planul xOy (ec: z = 0) este numită *colierul* hiperboloidului cu o pânză.

Suprafeţele $H`_1$: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ şi $H``_1$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ sunt de asemenea hiperboloizi cu o pânză şi axe netransversale Ox şi respectiv Oy.

Definiţia 7.4.4. *Suprafaţa C :* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ *se numeşte conul asimptotic al hiperboloidului cu o pânză H_1.*

Definiţia 7.4.5. *Se numeşte hiperboloid cu două pânze, o suprafaţă (cuadrică) (H_2) pentru care există un reper cartezian Oxyz faţă de care aceasta are ecuaţia*

(7.4.7) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\ \textit{unde } a, b, c > 0.$$

Hiperboloidul cu două pânze (H_2) este caracterizat parametric de ecuaţiile : $\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\,u\,\cos v \\ y = b\,\mathrm{sh}\,u\,\sin v \\ z = \pm c\,\mathrm{ch}\,u \end{cases}$ $u\in \mathbf{R}$, $v\in [0,2\pi)$.

În cele ce urmează, vom determina intersecţiile hiperboloidului cu două pânze cu planele $\pi_\alpha \| xOy$, $\pi_\beta \| xOz$ şi $\pi_\gamma \| yOz$ (plane caracterizate de ecuaţiile $z = \alpha$, $y = \beta$ şi respectiv $x = \gamma$).

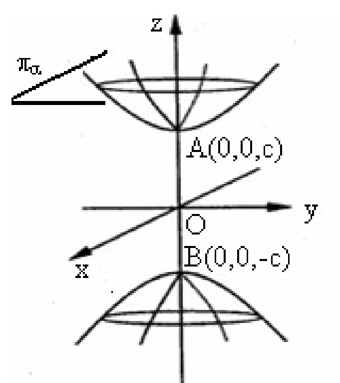


Fig. 36

Intersecţia hiperboloidului (H_2) cu planul π_α este curba de ecuaţie: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\alpha^2}{c^2}+1=0 \\ z=\alpha \end{cases}$.

Se observă că dacă $|\alpha| < c$, atunci intersecţia planului cu hiperboloidul este mulţimea vidă. Dacă $|\alpha| = c$, intersecţia este formată din punctele A(0,0,c,), B(0,0,-c,), iar dacă $|\alpha| > c$, atunci curbele de intersecţie sunt elipse ale căror semiaxe cresc atunci când distanţa dintre planele π_α şi xOy creşte (vezi Fig. 36).

Intersecţiile cu planele π_β şi π_γ sunt hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + 1 = 0 \\ y = \beta \end{cases} \text{ şi respectiv } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{\gamma^2}{a^2} + 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}.$$

Axele şi planele sistemului de coordonate sunt axe, respectiv plane, de simetrie. Punctele A(0,0,c) şi B(0,0,-c) vor fi numite *vârfurile* hiperboloidului cu două pânze . Axa netransversală a hiperboloidului (H_2) este axa Oz. În mod asemănător se pot defini hiperboloizii cu două pânze $H`_2$ şi respectiv $H``_2$ cu axele netransversale Ox şi respectiv Oy. Avem

$H`_2$: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ şi $H``_2$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$.

Conul C : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ este conul asimptotic al hiperboloidului H_2.

7.4.4 Paraboloizii

Definiția 7.4.6. *Se numeşte paraboloid eliptic, suprafața (cuadrica) (P_1) pentru care există un reper cartezian Oxyz față de care ecuația suprafeței este*

(7.4.8) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \text{ unde } a, b > 0.$$

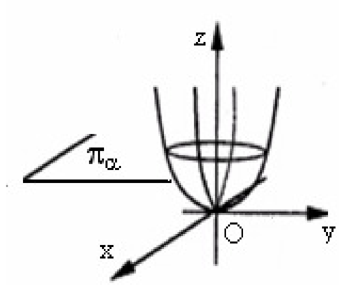


Fig. 37

Ecuațiile parametrice ale paraboloidului eliptic sunt: $\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = u^2 \end{cases}$ $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0,2\pi)$.

Intersecția paraboloidului eliptic (P_1) cu planul π_α (caracterizat de ecuația $z = \alpha$) este curba de ecuație: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$.

Se observă că dacă $\alpha < 0$, intersecția este mulțimea vidă, iar dacă $\alpha = 0$, atunci intersecția este formată dintr-un singur punct, O(0,0,0). Dacă $\alpha > 0$, atunci intersecția este o elipsă cu semiaxele $a` = a\sqrt{\alpha}$, $b` = b\sqrt{\alpha}$ (vezi Fig.

37). Intersecţiile paraboloidului eliptic cu planele π_β şi π_γ sunt parabolele $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} = z \\ y = \beta \end{cases}$ şi respectiv $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} = z \\ x = \gamma \end{cases}$.

Definiţia 7.4.7. *Se numeşte paraboloid hiperbolic, suprafaţa (cuadrica) (P_2) pentru care există un reper cartezian Oxyz faţă de care ecuaţia suprafeţei este*

(7.4.9) $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$, *unde a, b > 0.*

Paraboloidul hiperbolic *(P_2)* este caracterizat de ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = a\,u\,chv \\ y = b\,u\,shv \\ z = u^2 \end{cases}$, $u, v \in \mathbf{R}$.

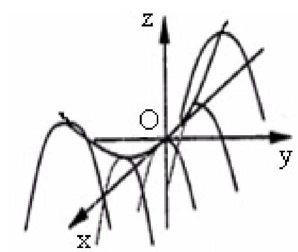


Fig. 38

Intersecţia paraboloidului hiperbolic (P_2) cu planul π_α este curba de ecuaţie: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$.

Dacă $\alpha = 0$ atunci intersecţia constă în două drepte concurente (d_1 : bx-ay = 0, d_2: bx + ay = 0), iar în cazul $\alpha \neq 0$ este o hiperbolă.

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu planele π_β şi respectiv π_γ, definite în secţiunea 7.4.3, sunt parabolele de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{b^2} = z \\ y = \beta \end{cases}, \text{ respectiv } \begin{cases} \dfrac{\gamma^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z \\ x = \gamma \end{cases}.$$

Observăm că parabolele situate în planele π_β, $\beta \in \mathbf{R}$ sunt cu ramurile în sus, iar cele din planele π_γ, $\gamma \in \mathbf{R}$ sunt cu ramurile în jos, astfel că această suprafaţă seamănă foarte bine cu o şa (vezi Fig. 38).

Paraboloidul hiperbolic are aceleaşi axe şi plane de simetrie ca şi paraboloidul eliptic.

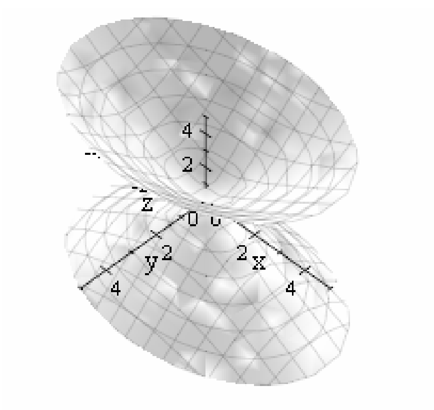
7.4.5 Conul, cilindrul, perechi de plane

Definiția 7.4.8. *Se numeşte con, suprafața (C) caracterizată de ecuația*

(7.4.10) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Ecuațiile parametrice ale conului sunt $\begin{cases} x = a\,u\sin v \\ y = b\,u\cos v \\ z = u \end{cases}$, $u\in \boldsymbol{R}$, $v\in [0,2\pi)$

Intersecția conului cu planul xOy este punctul O(0,0,0). Intersecțiile cu plane paralele cu planul xOy sunt elipse (Fig. 39). Este uşor de văzut că intersecția conului cu planul xOz (respectiv yOz) este reuniunea a două



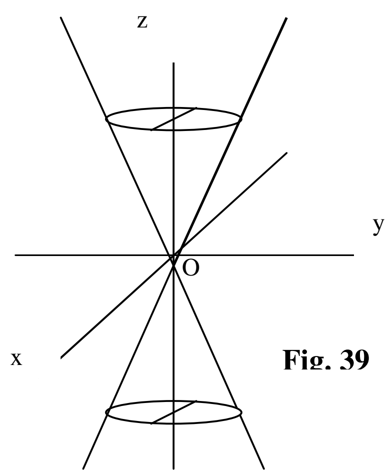


Fig. 39

drepte concurente, în timp ce intersecțiile cu plane paralele cu planul xOz (respectiv yOz) sunt hiperbole.

Definiția 7.4.9. *Se numeşte suprafață cilindrică, suprafața caracterizată, în spațiul E_3, de o ecuație în două nedeterminate*

(7.4.11) *F(x, y) =0 (F(y, z) =0 sau F(x, z) =0).*

În particular, dacă $F(x, y)= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, atunci suprafaţa definită de (7.4.11) este un cilindru eliptic. Pentru b = a, se obţine ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$ a cilindrului circular. În Fig. 40 avem reprezentarea grafică a unui cilindru eliptic în cazul a = 2 şi b = 3. Dacă $F(x, y)= \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$, atunci (7.4.11) defineşte un cilindrul hiperbolic, iar în cazul în care $F(x, y) = y^2 - 2px$, un cilindrul parabolic.

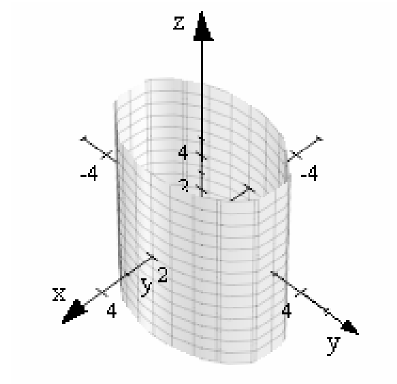


Fig. 40

Aceste suprafeţe cilindrice au generatoarele paralele cu axa Oz .

Alte suprafeţe algebrice de ordinul al doilea sunt următoarele:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - plane secante

$x^2 – a^2 = 0$ - plane paralele (confundate, pentru a = 0)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - dreaptă dublă

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ - punct dublu

$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 1 = 0$ - mulţimea vidă .

7.5. Exerciţii

1. Să se calculeze invarianţii conicelor de mai jos. Să se determine natura şi genul acestora şi, în cazul conicelor cu centru, să se determine coordonatele centrului de simetrie.

a) $5x^2 + 8xy + 6y^2 - 14x - 18y + 9 = 0$; b) $8x^2 - 4xy + 2y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$; c) $2xy - 4x - 6y + 3 = 0$; d) $8x^2 - 8xy + 2y^2 - 6x - 14y + 8 = 0$; e) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$; f) $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y - 1 = 0$.

R : a) Invarianţii conicei sunt $\Delta = -69$, $\delta = 14$, $I = 14$. Deoarece $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$ şi $\Delta I < 0$ rezultă că este vorba despre o elipsă (conica este nedegenerată şi are centru de simetrie $C(3/7,17/14)$). b) $\Delta = -18$, $\delta = -20$, $I = 6$. Conica este o hiperbolă (conică nedegenerată) cu centrul $C(9/10, -21/10)$. c) $\Delta = 9$, $\delta = -1$, $I = 0$, conică nedegenerată, hiperbolă, cu centrul $C(3,2)$. d) $\Delta = -578$, $\delta = 0$, $I = 10$, conică nedegenerată, fără centru de simetrie, parabolă. e) $\Delta = 0$, $\delta = 0$, $I = 5$, conică degenerată, mulţimea vidă. f) $\Delta = 0$, $\delta = 0$, $I = 10$, conică degenerată, fără centru de simetrie, pereche de drepte paralele.

2. Să se determine natura, ecuaţia canonică şi să se construiască conicele date prin ecuaţia carteziană generală, în cazurile de mai jos:

a) $5x^2 + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$; b) $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$; c) $7x^2 - 8xy - 2y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$; d) $8x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$; e) $4xy - 2y + 1 = 0$; f) $3x^2 - 8xy + 3y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$; g) $2x^2 - 8xy + 2y^2 + 3x - 2y + 8 = 0$.

R : a) Conica este o elipsă imaginară. Folosind Propoziţia 7.2.1, deducem că ecuaţia canonică în reperul XOY este : $5X^2 + 5Y^2 + 8/5 = 0$. b) Conica este o parabolă. Pentru determinarea ecuaţiei canonice se foloseşte ecuaţia (7.3.1): $Y^2 = \sqrt{2}/3X$. c) hiperbolă, $[(5-\sqrt{145})/2]X^2 + [(5+\sqrt{145})/2]Y^2 + 2/5 = 0$. d) hiperbolă, $[(5-3\sqrt{5})/2]X^2 + [(5 +$

$3\sqrt{5}$)/2]Y^2 + 20 = 0. e) hiperbolă, $2X^2 - 2Y^2 + 1 = 0$. f) pereche de drepte concurente, $-X^2 + 7Y^2 = 0$. g) hiperbolă, $-2X^2 + 6Y^2 + 181/24 = 0$.

3. Să se determine natura şi genul conicelor familiei: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)xy + 2\alpha y^2 - (\alpha^2 + 1)y = 0$, $\alpha \neq 0$. Să se scrie coordonatele centrelor, în cazul conicelor cu centru din familie.

R: Matricea asociată conicei este $\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2-1}{2} & 0 \\ -\frac{\alpha^2-1}{2} & 2\alpha & \frac{\alpha^2+1}{2} \\ 0 & \frac{\alpha^2+1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, iar invarianţii sunt $\Delta = -\frac{1}{4}\alpha^5 - \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha$, $\delta = -\frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{5}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}$, $I = 3\alpha$. Deoarece $\Delta = -(1/4)\alpha(\alpha^2+1)^2$, rezultă că $\Delta \neq 0$ oricare ar fi $\alpha \neq 0$. Deci, toate conicele din familie sunt nedegenerate. Pe de altă parte ecuaţia $\delta = 0$ are soluţiile $\alpha_i = \pm\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)$, i = 1,..,4. Observăm că $\Delta I = -(3/4)\alpha^2(\alpha+1)^2 < 0$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Deci, dacă $\alpha \neq \pm\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)$, 0, -1, atunci $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\Delta I < 0$ şi conicele sunt nişte elipse. Centrele elipselor sunt punctele C_α de coordonate $x_\alpha = \frac{\alpha^4-1}{6\alpha^2+\alpha^4+1}$, $y_\alpha = \frac{2\alpha+2\alpha^3}{6\alpha^2+\alpha^4+1}$. Dacă $\alpha = \pm\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)$, atunci conicele sunt nişte parabole.

4. Să se discute natura şi genul conicelor fascicolului[*)]

$$(1+\lambda)x^2 + 4xy + (3-\lambda)y^2 + 2x + 4y - 6 = 0 \ , \ \lambda \in \boldsymbol{R}$$

şi să se găsească conicele degenerate ale fascicolului .

R : Matricea conicei este $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $\Delta = 6\lambda^2 - 15\lambda + 7$, $\delta = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$, I = 4. Se observă că $\Delta \neq 0$ oricare ar fi $\lambda \neq \frac{5}{4} \pm \frac{1}{12}\sqrt{57}$, iar $\delta < 0$ pentru $\lambda \neq 1$. Deci pentru $\lambda \neq \frac{5}{4} \pm \frac{1}{12}\sqrt{57}$, 1 conica este o hiperbolă. Dacă $\lambda = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{12}\sqrt{57}$, conica este degenerată. Cum $\delta < 0$,

[*)] Prin fascicol de conice, determinat de conicele fundamentale (γ_1) : f(x,y) = 0 şi (γ_2) : g(x,y) = 0 Înţelegem mulţimea conicelor caracterizate de ecuaţia generală (Γ) $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$se numeşte

rezultă că avem de a face cu o pereche de drepte concurente. Dacă $\lambda = 1$ atunci $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$ şi avem o parabolă.

5. Să se scrie ecuaţia generală a conicei cu centrul C(64/23, -42/23) care trece prin punctele A(0, (1/3)$\sqrt{13}$ - 2/3), B(0, (-1/3)$\sqrt{13}$ - 2/3), D(($\sqrt{13}$ + 1)/2, 0), E(($\sqrt{13}$ - 1)/2, 0).

R : Fie *(C)* : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ecuaţia generală a conicei. Punând condiţiile A, B, D, E $\in$ *(C)*, deducem că a = (1/4)e, c = (3/4)e, d = -(1/4)e şi f= -(3/4)e. Una din ecuaţiile centrului conicei este (2/4)e x + by - (1/4)e = 0. Impunând şi condiţia ca C $\in$*(C)*, rezultă că b = (5/8)e. Deci ecuaţia generală a conicei este $2x^2 + 5xy + 6y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$.

6. Să se scrie ecuaţia familiei de conice, circumscrise triunghiului determinat de punctele A(3, 2), B(-2, -1), C(4, 1). Să se determine conicele degenerate ale acestei familii.

R : Fie *(C)* : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ecuaţia generală a conicei. Condiţiile A, B, C$\in$ *(C)*, conduc la sistemul 9a + 6b + 4c + 3d + f + 2e = 0, 4a + 2b + c - 2d + f - e = 0, 16a + 4b + c + 4d + f + e = 0 a cărei soluţie este d = (1/4)b - (13/4)a + (3/4)c, f = -(27/4)a - (13/4)b - (7/4)c, e = (15/4)a - (7/4)b - (9/4)c. Ecuaţia fasciculului de conice este: $ax^2 + bxy + cy^2$ + [(1/4)b - (13/4)a + (3/4)c]x + [-(27/4)a - (13/4)b - (7/4)c]y + [(15/4)a-(7/4)b - (9/4)c] = 0. Invariantul Δ pentru aceste conice este -(1/64)(25a + 15b + 9c)(a-b + c)(9a + 3b + c). Este clar că $\Delta = 0$ dacă şi numai dacă (25a + 15b + 9c)(a - b + c)(9a + 3b + c) = 0, adică 25a + 15b + 9c = 0 sau a - b + c = 0 sau 9a + 3b + c = 0. În fiecare din aceste cazuri se obţine câte un fascicul de conice.

7. Să se scrie ecuaţia sferei care are centrul în punctul M(1, 2, 3) şi este tangentă la planul (P): x + 2y - 3z + 5 = 0.

R : Sfera cu centrul în M şi raza *R* are ecuaţia generală (S) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = R^2$. Deoarece ea este tangentă la planul *(P)*, trebuie ca distanţa de la centrul sferei la

plan să fie egală cu *R*. Avem $\delta(M, (P)) = \dfrac{|1+2\cdot 2-3\cdot 3+5|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = 1/\sqrt{14}$. Ecuaţia sferei este $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1/14$.

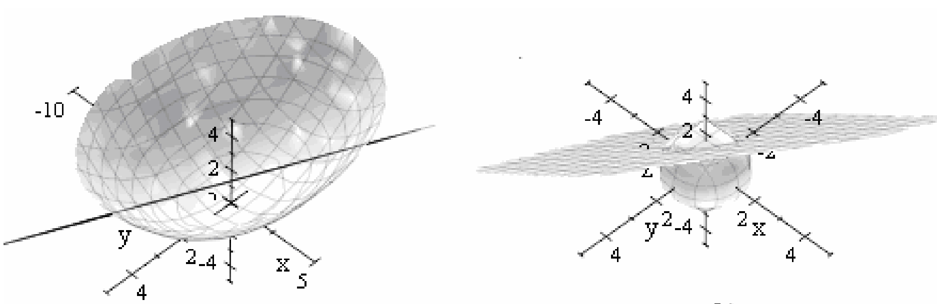
8. Să se scrie ecuaţia sferei care are raza $\sqrt{22}$, centrul pe dreapta *(d)* : $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{6}$ şi este tangentă planului *(P)* : $2x + 3y - 3z = 0$.

R : Căutăm un punct $M(x, y, z) \in (d)$ astfel încât distanţa de la el la planul *(P)* să fie egală cu $\sqrt{22}$. Coordonatele x, y, z ale punctului satisfac sistemul $\begin{cases} \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{6} \\ |2x+3y-3z|/\sqrt{22} = \sqrt{22} \end{cases}$. Soluţiile sistemului sunt $C_1(x_1 = 13,\ y_1 = -7,\ z = 9)$, $C_2(x_2 = 5,\ y_2 = 1,\ z_2 = -3)$. Ecuaţiile căutate sunt (S_1) : $(x - 13)^2 + (y + 7)^2 + (z - 9)^2 = 22$, (S_2) : $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 22$.

9. Să se precizeze ecuaţiile şi natura curbelor de intersecţie ale planului *(P)* : $2x + 3y - 3z + 4 = 0$ cu cuadricele

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{6} = z$, b) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0$, c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} + 1 = 0$.

R : a) Curba de intersecţie, situată în planul *(P)*, este elipsa : $(37/60)y^2 - (9/10)yz + (6/5)y + (9/20)z^2 - (11/5)z + 4/5 = 0$. b) Elipsă : $(13/8)y^2 - (9/4)yz + 3y + (11/8)z^2 - 3z + 1 = 0$.(Figura 41 ilustrează cazurile a) şi b).) c) Intersecţia este mulţimea vidă (o elipsă imaginară de ecuaţie : $(97/144)y^2 - (9/8)yz + (3/2)y + (1/2)z^2 - (3/2)z + 2 = 0$.)



a) **Fig. 41** b)

CAPITOLUL 8

CURBE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

8.1. Curbe în plan

I. Definiţia analitică a curbelor plane

În capitolul 7 am studiat deja câteva exemple de curbe plane, amintim aici conicele nedegenerate: elipsa, hiperbola şi parabola. În continuare vom prezenta noţiunea generală de curbă plană, precum şi o serie de proprietăţi ale acesteia.

Curbele plane studiate până acum au fost reprezentate doar prin ecuaţii implicite, de forma F(x, y) = 0. Deoarece, din punctul de vedere al cinematicii, o curbă plană este traiectoria unui punct material M, este util să descriem curba prin legătura dintre coordonatele carteziene, (x, y), ale punctului material M şi timpul t : $x=f(t)$, $y=g(t)$.

Fie $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ (xOy) un reper cartezian în spaţiul punctual euclidian E_2. Definiţia următoare permite introducerea riguroasă a noţiunii de curbă plană folosind diferite tipuri de reprezentări: explicită, implicită, parametrică etc.

Definiţia 8.1.1 *Numim arc simplu de curbă plană, mulţimea (C) a punctelor $M(x, y)\in E_2$ care satisfac o ecuaţie de tipul*

(8.1.1) $\quad y = f(x),\ a < x < b$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}$ *sunt fixate,*

sau o ecuaţie de tipul

(8.1.2) $\quad F(x, y)=0,\ a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2$ *cu* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$

sau un sistem de forma

(8.1.3) $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$, *$c_1 < t < c_2$, cu c_1, $c_2 \in$ **R**,*

unde f, F, g, ḥ sunt funcţii reale, de clasă cel puţin C^1 pe domeniile lor de definiţie, iar g şi h stabilesc o corespondenţă bijectivă şi bicontinuă între punctele $M \in (C)$ şi mulţimea valorilor parametrului $t \in (c_1, c_2)$.

Dacă arcul simplu de curbă *(C)* este definit prin ecuaţia (8.1.1), spunem că avem o *reprezentare (carteziană) explicită* a acestuia. În cazul utilizării ecuaţiei (8.1.2) avem o *reprezentare implicită*, iar în cazul sistemul (8.1.3) o *reprezentarea parametrică*.

Fie *f* o funcţia de clasă cel puţin C^1 pe intervalul (t_1, t_2). Dacă (ρ, θ) este un sistem de coordonate polare în E_2, atunci mulţimea punctelor $M(\rho, \theta) \in E_2$, ale căror coordonate polare satisfac ecuaţia

(8.1.4) $$\rho = f(\theta), \theta \in (t_1, t_2),$$

defineşte de asemenea un arc simplu de curbă. Reprezentarea (8.1.4) se *numeşte ecuaţia în coordonate polare a arcului de curbă*. Asemănător, mulţimea punctelor $M \in E_2$, al căror vector de poziţie $\bar{r}$ satisface ecuaţia

(8.1.5) $$\bar{r} = \bar{r}(t),\ c_1 < t < c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}\ \ (\bar{r}(t) = g(t)\bar{i} + h(t)\bar{j},$$

unde g, h îndeplinesc condiţiile din definiţia de mai sus) reprezintă un arc simplu de curbă. Ecuaţia (8.1.5) se numeşte *ecuaţia vectorială a arcului de curbă (C)*.

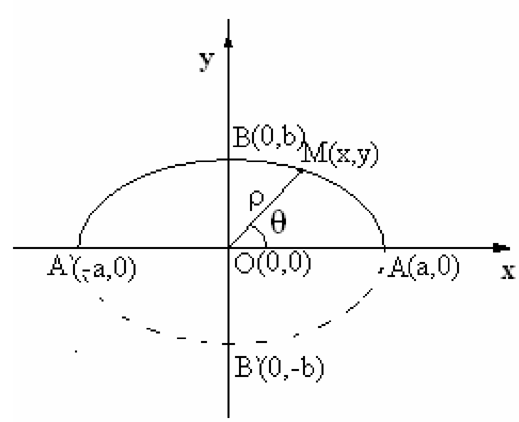


Fig. 40

Exemplu 8.1.2 *a) Se consideră porţiunea situată deasupra axei Ox din elipsa cu centrul în originea O(0, 0) a*

reperului cartezian xOy şi vârfurile în punctele A(a, 0) , A`(-a, 0) , B(b, 0), B`(-b, 0)(Vezi Fig. 40).

Ecuaţia carteziană explicită a acestui arc de elipsă este y = $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$, *x∈ (-a, a), iar ecuaţia implicită este* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ *= 0, y > 0, x ∈ (-a, a). Deoarece funcţiile f(x) =* $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$, *F(x, y) =* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ *satisfac condiţiile din definiţia de mai sus, deducem că porţiunea de elipsă descrisă este un arc simplu de curbă. Ecuaţiile parametrice ale acestui arc sunt*

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ *t∈ (0,π) iar cele vectoriale* $\bar{r}$ *= a cos(t)*$\bar{i}$ *+ b sin(t)*$\bar{j}$*, t ∈ (0,π).*

În ceea ce priveşte ecuaţiile în coordonate polare, acestea sunt ρ = $\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$, *θ∈ (0,π). Observăm că, în cazul în care a = b, arcul de curbă descris mai sus reprezintă semicercul de rază r = a, cu centrul în originea reperului cartezian xOy, situat deasupra axei Ox.*

Definiţia 8.1.2 *O mulţime de puncte (C) se numeşte arc regulat de curbă plană dacă (C) este un arc simplu de curbă plană şi, în reprezentările (8.1.2) şi (8.1.3), sunt îndeplinite condiţiile*

(8.1.6) $(F`_x)^2 + (F`_y)^2 > 0,\ a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2$ $\left(F`_x = \frac{\partial F}{\partial x},\right.$

$\left.F`_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ *şi respectiv*

(8.1.7) $(g`(t))^2 + (h`(t))^2 > 0,\ c_1 < t < c_2.$

Condiţia (8.1.6) din definiţia de mai sus arată că, în cazul arcelor regulate de curbă, derivatele F'_x şi F'_y din reprezentarea implicită nu se anulează simultan în punctul de coordonate $(x, y) \in (a_1, a_2)\times(b_1, b_2)$. Analog, în cazul reprezentării parametrice condiţia (8.1.7) exprimă faptul că $g'(t)$ şi $h'(t)$ nu sunt simultan nule în nici un $t \in (c_1, c_2)$.

Dacă în Definiţia 8.1.2 cerem ca funcţiile *F, g* şi *h* să fie continue pe mulţimea de definiţie şi să aibă derivate (eventual derivate parţiale) până la un ordin *n*(inclusiv *n*) continue (adică funcţiile să fie de clasă C^n) şi cel puţin una din derivatele de ordinul *n* să nu se anuleze pe mulţimea de definiţie, atunci arcul regulat se spune că este arc regulat de ordinul *n* sau de clasă *n*.

Condiţiile (8.1.6), (8.1.7) se numesc *condiţii de regularitate*.

Definiţia 8.1.3 *Un punct M de pe arcul simplu de curbă (C) se numeşte punct regulat dacă el îndeplineşte toate condiţiile de regularitate. În caz contrar, punctul se numeşte punct singular.*

Din definiţiile de mai sus deducem că un arc regulat este constituit numai din puncte regulate, exceptând eventual extremităţile.

Definiţia 8.1.4 *Numim curbă de clasă n, o reuniune de arce regulate de clasă n.* Deci, dacă (C_i) $(i \in I)$ este o mulţime de arce regulate de clasă *n*, atunci curba *(C)* de clasă *n* arată ca în Fig. 41. (Se observă că ea poate avea şi întreruperi.)

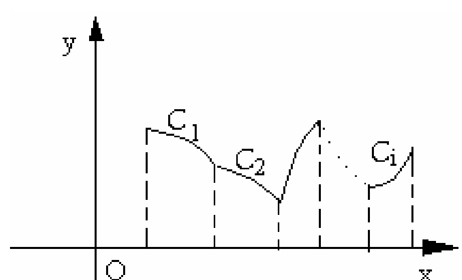


Fig. 41

II. Dreapta tangentă şi dreapta normală într-un punct regulat

Definiţia 8.1.5 *Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al curbei (C) şi fie $M_1(x_1, y_1) \in$ (C) un punct oarecare. Dreapta tangentă la curba (C) în punctul regulat M_0 este limita dreptei M_1M_0, secantă la curbă, când $M_1 \to M_0$ (Fig. 42).*

Fie curba *(C),* a cărei ecuaţie parametrică este y = f(x), şi fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al ei, iar $M_1(x_1, y_1)$ un punct oarecare pe curbă.

Căutăm ecuaţia dreptei tangente la curba *(C)* în punctul M_0.

Ecuaţia secantei M_1M_0 este $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$. Ţinând cont de ecuaţia parametrică a curbei, ecuaţia secantei M_1M_0 se mai scrie $\frac{x - g(t_0)}{g(t_1) - g(t_0)} = \frac{y - h(t_0)}{h(t_1) - h(t_0)}$.

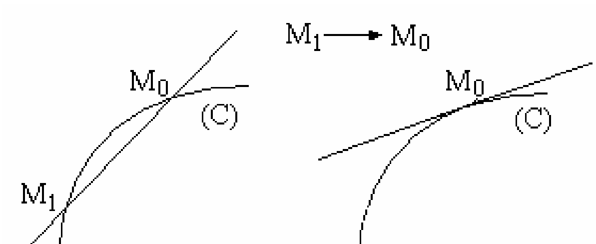


Fig. 42

Conform definiţiei de mai sus, ecuaţia tangentei în punctul M_0 se obţine trecând la limită, pentru $t_1 \to t_0$, în ecuaţia secantei M_1M_0. Obţinem

(8.1.8) $$\frac{x - g(t_0)}{g`(t_0)} = \frac{y - h(t_0)}{h`(t_0)}.$$

Ecuaţia (8.1.8) reprezintă *ecuaţia dreptei tangente la curba (C)* în punctul regulat $M_0 \in$ *(C)* atunci când curba este reprezentată parametric.

Dacă folosim reprezentarea explicită (8.1.1) a curbei *(C)*, observăm că $f`(x_0) = \frac{g`(t_0)}{h`(t_0)}$, $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = f(x_0) = h(t_0)$. Aplicând (8.1.8), obţinem

(8.1.9) $$y - y_0 = f`(x_0)(x - x_0),$$

adică *ecuaţia tangentei în punctul M_0* în cazul reprezentării explicite.

În cazul curbei date prin ecuaţia implicită F(x, y) = 0, ţinem cont de formula de derivare a funcţiilor implicite şi avem

$y`(x_0) = -\frac{F`_x(x_0, y_0)}{F`_y(x_0, y_0)} = -\frac{g'(t_0)}{h`(t_0)}$. În acest caz, ecuaţia (8.1.8) devine

(8.1.10) $$(y - y_0)F`_y(x_0, y_0) + (x - x_0)F`_x(x_0, y_0) = 0.$$

Am obţinut teorema următoare:

Teorema 8.1.2 *Considerăm curba (C) şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al ei. În cazul reprezentării parametrice (8.1.3) a curbei (C), ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este (8.1.8); în cazul reprezentării explicite (8.1.1) a curbei (C), ecuaţia tangentei este (8.1.9), iar în cazul reprezentării implicite de ecuaţia tangentei este (8.1.10).*

Definiţia 8.1.6 *Dreapta normală într-un punct regulat al unei curbe plane este dreapta ce trece prin acel punct şi este perpendiculară pe dreapta tangentă în punctul respectiv.*

Din definiţia de mai sus şi Teorema 8.1.2 rezultă imediat ecuaţiile normalei la o curbă plană într-un punct regulat al acesteia.

Teorema 8.1.3 *Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al curbei (C). În cazul în care curba (C) are reprezentarea parametrică (8.1.3), ecuaţia dreptei normale în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este*

(8.1.11) $$\frac{x - g(t_0)}{h`(t_0)} + \frac{y - h(t_0)}{g`(t_0)} = 0;$$

în cazul reprezentării carteziene explicite (8.1.1), ecuaţia normalei este

(8.1.12) $$(y - y_0) f`(x_0) + (x - x_0) = 0,$$

iar în cazul reprezentării implicite ecuaţia căutată este

(8.1.13) $$(y - y_0)F`_x(x_0, y_0) - (x - x_0)F`_y(x_0, y_0) = 0.$$

III. Curbura şi rază de curbură

Înainte de a da definiţia următoare, reamintim că lungimea arcului de curbă AB, A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) ∈ *(C)* este dată de formula

(8.1.14) $l_{AB} = \int_{x_a}^{x_B} \sqrt{1 + (f`(x))^2}\, dx$, în cazul reprezentării carteziene explicite (8.1.1) şi de formula

(8.1.15) $l_{AB} = \int_{t_a}^{t_B} \sqrt{(g`(t))^2 + (h`(t))^2}\, dt$, în cazul reprezentării parametrice (8.1.2), unde $x_A = g(t_A)$, $x_B = h(t_B)$.

Definiţia 8.1.7 *a) Numim unghi de contingenţă al unui arc de curbă şi-l notăm* $\Delta\alpha$*, unghiul ascuţit format de tangentele duse la extremităţile arcului (Fig. 43).*

b) Numim curbură medie a unui arc de curbă, şi o notăm cu K_m*, raportul dintre unghiul de contingenţă şi lungimea arcului:*

(8.1.15) $$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

c) Numim curbura unei curbe într-un punct şi o notăm cu K sau $\frac{1}{R}$*, limita curburii medii când lungimea arcului tinde către zero*

(8.1.16) $$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Inversul curburii poartă numele de raza de curbură a curbei în acel punct.

În cele ce urmează vom determina o expresie analitică pentru calculul curburii. Pentru început, considerăm reprezentarea explicită (8.1.1) a curbei *(C)*. Presupunem că funcţia f(x) este de clasă cel puţin 2 în vecinătatea unui punct regulat $M_0(x, y)$ al curbei. Considerăm punctul $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, infinit apropiat de M, şi (T_0), (T) tangentele în M_0 şi respectiv M_1, care formează cu axa Ox unghiurile φ şi respectiv $\varphi + \Delta\varphi$ (Fig. 43). Presupunem în plus că $f`` \neq 0$.

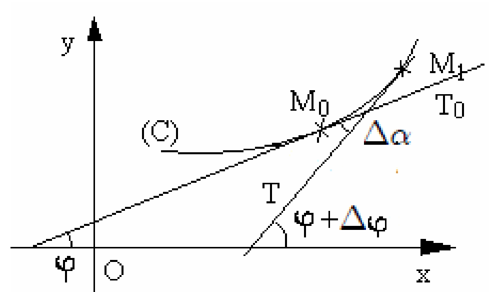


Fig. 43

Este uşor de văzut că unghiul $\varphi + \Delta\varphi$, ca unghi exterior, este egal cu suma unghiurilor φ şi $\Delta\alpha$. Deci $\Delta\varphi = \Delta\alpha$. De asemenea, observăm că dacă $\Delta s \to 0$ ($M_1 \to M_0$), atunci $\Delta x \to 0$. Deci

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{(\Delta\varphi/\Delta x)}{(\Delta s/\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta\varphi/\Delta x)}{(\Delta s/\Delta x)} = \frac{(d\varphi/dx)}{(ds/dx)}.$$

Interpretarea geometrică a derivatei, *tg* $\varphi = f`(x) \Leftrightarrow \varphi = arctg\ f`(x)$, conduce la relaţia $d\varphi/dx = \frac{1}{1+(f`(x))^2}f``(x)$. Pe de altă parte, din formula (8.1.14), rezultă că $ds/dx = \sqrt{1+(f`(x))^2}$ şi

(8.1.17) $$K = \frac{f``(x)}{\left[1+(f`(x))^2\right]^{3/2}},\quad R = \frac{\left[1+(f`(x))^2\right]^{3/2}}{f``(x)}.$$

Teorema 8.1.4 *Fie (C) o curbă plană, de clasă cel puţin 2 într-o vecinătate a punctului său regulat şi neinflexionar (* $y``(x) \neq 0$*) M(x, y). a)În cazul reprezentării explicite (8.1.1) a curbei*

(C) curbura şi respectiv raza de curbură în punctul M sunt date de relaţia (8.1.17).

b) În cazul reprezentării implicite (8.1.2) a curbei (C), curbura este dată de formula

(8.1.18) $$K = -\frac{(F_y`)^2 F_{xx}`` - 2F_x`F_y`F_{xy}`` + (F_x`)^2 F_{yy}``}{(F_y`)^2 + (F_x`)^2}.$$

c) În cazul reprezentării parametrice (8.1.3) curbura este

(8.1.19) $$K = -\frac{g`(x)h``(x) - h`(x)g``(x)}{(g`(x))^2 + (h`(x))^2}.$$

Demonstraţie. Deoarece cazul a) a fost demonstrat, este suficient să arătăm b) şi c). b) Teorema de derivare a funcţiilor implicite ne asigură că $f`(x) = y`(x) = -\frac{F`_x(x,y)}{F`_y(x,y)}$. Derivând încă o dată pe $f`(x)$ în raport cu x obţinem $f``(x) = \frac{(F_y`)^2 F_{xx}`` - 2F_x`F_y`F_{xy}`` + (F_x`)^2 F_{yy}``}{(F_y`)^3}$. Înlocuind expresiile obţinute pentru $f`(x)$ şi $f``(x)$ în (8.1.17) obţinem (8.1.18). c) Reamintim că $f`(x) = -\frac{g'(t)}{h`(t)} = -\frac{\dot{g}}{\dot{h}}$. Deci $f``(x) = -\frac{\dot{g}\ddot{h} - \ddot{g}\dot{h}}{(\dot{h})^2}$. Din (8.1.17) rezultă (8.1.19) prin înlocuire directă.

Este bine-cunoscut următorul rezultat: Curbura unei curbe este identic nulă dacă şi numai dacă curba este o dreaptă (pentru detalii vezi [1]). Rezultă următoarea interpretare: curbura unei curbe într-un punct măsoară abaterea curbei de la o linie dreaptă, anume abaterea de la dreapta tangentă la curbă în punctul respectiv.

VI. Puncte multiple ale unei curbe plane

Fie *(C)* o curbă definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$. Punctul $M(x, y) \in (C)$ se numeşte punct multiplu de ordinul n, dacă funcţia $F(.,.)$ împreună

cu toate derivatele sale parţiale până la ordinul *n-1* inclusiv se anulează în acest punct şi cel puţin o derivată parţială de ordinul *n* este diferită de zero în M(*x, y*).

Propoziţia 8.1.1. *Fie (C) o curbă definită de ecuaţia F(x, y) = 0, unde F este o funcţie de clasă* C^2. *Într-un punct dublu, M(x, y)*$\in$ *(C), pantele tangentelor la cele două ramuri ale curbei sunt rădăcinile ecuaţiei în m*

(8.1.20) $$m^2 F_{yy}``(x, y) + 2m\, F_{xy}``(x, y) + F_{xx}``(x, y) = 0.$$

Demonstraţie. Dacă punctul $M_0(x_0, y_0)$ este un punct dublu al curbei *(C)*, atunci $F(x_0, y_0) = 0$, $F_x`(x_0, y_0) = 0$, $F_y`(x_0, y_0) = 0$. Panta tangentei în M_0 este $m = -\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{F_x`(x,y)}{F_y`(x,y)}$. Cum M_0 este punct dublu, rezultă $m = -\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{F_x`(x,y) - F_x`(x_0,y_0)}{F_y`(x,y) - F_y`(x_0,y_0)}$. Aplicând teorema lui l` Hospital, avem $m = -\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{F_{xx}``(x,y) + F_{xy}``(x,y)y`(x)}{F_{yx}``(x,y) + F_{yy}``(x,y)y`(x)}$. Deoarece derivatele mixte sunt egale, iar $y`(x_0) = m$, trecem la limită şi eliminând numitorii obţinem ec. (8.1.20).

În funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei (8.1.20) avem următoarele situaţii (vezi Fig. 44):

Definiţia 8.1.8 *a) Punctul dublu* $M_0(x_0, y_0)$ *este eliptic dacă* $\Delta_{x_0y_0} \overset{not}{=} (F_{xy}``(x_0, y_0))^2 - F_{xx}``(x_0, y_0)\, F_{yy}``(x_0, y_0) < 0$. *În acest caz cele două tangente sunt imaginare iar punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *este un punct izolat.*

b) Punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$ *este hiperbolic dacă* $\Delta_{x_0y_0} > 0$. *Atunci ecuaţia (8.1.20) are două rădăcini reale şi distincte. Acestea corespund celor două tangente*

(distincte) la curbă în punctul M_0. Prin punct trec două ramuri ale curbei. Punctul M_0 se numeşte nod.

c) Punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$ este parabolic dacă $\Delta_{x_0y_0} = 0$. De această dată ecuaţia (8.1.20) are două rădăcini reale egale. Corespunzător, există două tangente la curbă în punctul M_0 reale şi confundate. Spunem că punctul M_0 este punct de întoarcere.

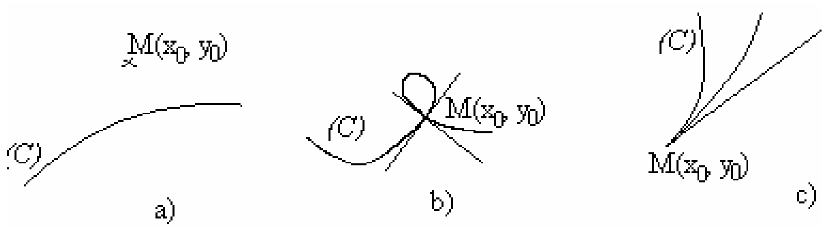


Fig. 44

8.2. Curbe în spaţiu

Fie $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ (notat Oxyz) un reper cartezian ortonormat în spaţiul punctual euclidian E_3.

Definiţia 8.2.1 *Numim arc simplu de curbă în spaţiu, mulţimea (C) a punctelor $M(x, y, z) \in E_3$ care satisfac fie ecuaţiile*

(8.2.1) $\quad y = f(x,y),\ z = g(x, y),\ (x, y) \in (a, b) \times (c, d),\ a, b, c, d \in \mathbf{R}$

fie ecuaţii de tipul

(8.2.2) $\quad F(x, y, z)= 0,\ G(x, y, z)= 0,\ (x, y, z) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3),\ a_i,\ b_i \in \mathbf{R},\ i= 1, 2, 3,$ *fie un sistem de forma*

(8.2.3) $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2),\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \\ z = z(t) \end{cases}$$

unde f, g, F, G, x ,y, z sunt funcţii reale de clasă cel puţin C^1 *pe domeniile lor de definiţie, funcţiile F şi G satisfac teorema de existenţă a funcţiilor implicite (p. 258 [8]) iar funcţiile x(.), y(.) şi z(.) stabilesc o corespondenţă bijectivă şi bicontinuă între punctele M* $\in$ *(C) şi mulţimea valorilor parametrului* $t \in (t_1, t_2)$.

Ecuaţia (8.2.1) poartă numele de *reprezentare explicită a arcului simplu de curbă (C)*, ecuaţia (8.2.2) este *reprezentarea implicită* a acestuia, iar sistemul (8.1.3) furnizează *reprezentarea parametrică a lui (C).*

Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului M $\in$ *(C).* Dacă funcţiile x(.), y(.) şi z(.) sunt cele din definiţia de mais sus, atunci ecuaţia

(8.2.4) $$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},\ t_1 < t < t_2,\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

se numeşte *ecuaţia vectorială a arcului simplu de curbă (C).*

Introducem notaţia $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}$ pentru determinantul funcţional $\begin{vmatrix} F`_y & F`_z \\ G`_y & G`_z \end{vmatrix}$. În mod asemănător se definesc şi determinanţii $\frac{D(F,G)}{D(z,x)}$, $\frac{D(F,G)}{D(x,y)}$.

Ca şi în cazul curbelor plane, avem următoarele condiţii de regularitate:

(8.2.5) $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} \neq 0$ sau $\frac{D(F,G)}{D(z,x)} \neq 0$ sau $\frac{D(F,G)}{D(x,y)} \neq 0$ - în cazul curbelor definite implicit prin ecuaţiile (8.2.2) şi

(8.2.6) $(x`(t))^2 + (y`(t))^2 + (z`(t))^2 \neq 0$ - în cazul curbelor definite prin ecuaţiile parametrice (8.2.3).

Astfel, un arc simplu de curbă în spaţiu *(C)* se numeşte *arc regulat de curbă* dacă în reprezentările (8.2.2) sau (8.2.3), sunt îndeplinite condiţiile (8.2.5), respectiv (8.2.6). Un *punct* M, de pe un arc simplu de curbă *(C)*, se numeşte *regulat* dacă îndeplineşte toate condiţiile de regularitate. În caz contrar, se spune că punctul este *singular*.

I. Dreapta tangentă şi planul normal la o curbă în spaţiu

Fie *(C)* o curbă definită parametric prin ecuaţiile (8.2.3) şi fie (8.2.4) ecuaţia sa vectorială. Reamintim formula de calcul a lungimii arcului regulat de curbă AB

(8.2.7) $$l_{AB} = \int_{t_a}^{t_B} \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2 + (z`(t))^2}\,dt.$$

Dreapta tangentă la curbă în punctul regulat $M_0\ (x_0, y_0, z_0) \in (C)$ este poziţia limită a dreptelor M_0M_1 atunci când $M_1 \in (C)$, $M_1 \to M_0$. Se cunoaşte, (vezi cursul de analiză matematică sau [8] pentru detalii), că vectorul director al tangentei în punctul M_0 este

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\Big|_{t=t_0} = \dot{\bar{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0)\bar{i} + \dot{y}(t_0)\bar{j} + \dot{z}(t_0)\bar{k},\ x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0.$$

Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct arbitrar M(x, y, z) de pe tangentă, atunci ecuaţia vectorială a tangentei este $\bar{R} = \bar{r}(t_0) + \lambda\,\dot{\bar{r}}(t_0)$. Ecuaţiile dreptei tangente la *(C)* în punctul M_0, sub formă de rapoarte, se obţin imediat şi sunt următoarele

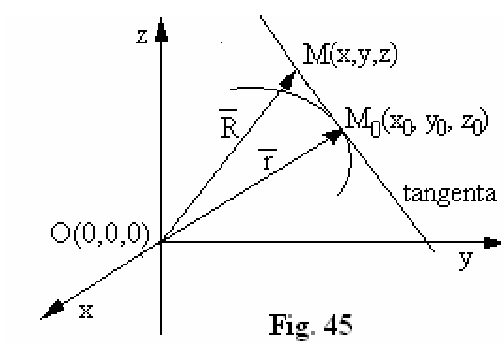


Fig. 45

(8.2.8) $$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}.$$

Dacă curba *(C)* este dată ca intersecţie a două suprafeţe, adică se cunosc ecuaţiile implicite (8.2.2), atunci presupunem că x = x(t); y = y (t); z = z (t) este o parametrizare a curbei. Prin derivare în raport cu *t*, obţinem: $$\begin{cases} F`_x x`(t) + F`_x y`(t) + F`_x z`(t) = 0 \\ G`_x x`(t) + G`_x y`(t) + G`_x z`(t) = 0 \end{cases}.$$

Pentru $t = t_0$, matricea sistemului are rangul doi, deoarece punctul M_0 este regulat. Putem presupune că, spre exemplu, determinantul $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}$ este nenul în punctul M_0. Rezolvăm sistemul de mai sus prin regula lui Cramer şi, luând $z`(t_0)$ ca parametru, avem

(8.2.9) $\dfrac{\dot{x}(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \dfrac{\dot{z}(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}$. Aplicând (8.2.8), obţinem ecuaţiile tangentei în M_0 la curba *(C)*

(8.2.10) $$\frac{x - x(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{y - y(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{z - z(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}.$$

Definiţia 8.2.2 *Se numeşte plan normal (π_N) la curba (C) într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (C)$, planul perpendicular în M_0 pe dreapta tangentă la curbă în punctul M_0.*

Dacă $\overline{R}$ (respectiv $\overline{r}(t_0)$) este vectorul de poziţie al unui punct arbitrar $M(x, y, z)$ situat în planul normal (π_N) (respectiv al punctului $M_0 \in$ *(C)*), atunci ecuaţia vectorială a planului normal este $<\overline{R} - \overline{r}(t_0), \dot{\overline{r}}(t_0)> = 0$.

De aici rezultă ecuaţia carteziană a planului normal:

(8.2.11) $$(x - x(t_0))x`(t_0) + (y - y(t_0))y`(t_0) + (z - z(t_0))z`(t_0) = 0.$$

În cazul în care curba (C) este dată prin ecuaţiile implicite (8.2.2), putem folosi formulele (8.2.9) pentru a rescrie ecuaţia (8.2.11) sub forma

(8.2.12) $$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ F_x` & F_y` & F_z` \\ G_x` & G_y` & G_z` \end{vmatrix} = 0,$$

unde toate derivatele parţiale $F_x`$, $G_x`$ etc. se calculează în punctul (x_0, y_0, z_0).

II. Triedrul lui Frenet

Fie *(C)* o curbă de clasă cel puțin 2 şi fie M_0 un punct regulat al curbei. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct oarecare M ∈ *(C)*. Presupunem că avem următoarea reprezentare vectorială a curbei *(C)* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in I$, *I* un interval din **R** şi că vectorul de poziție al punctului M_0 este $\bar{r}(t_0)$. Aşa cum am arătat în paragraful precedent vectorul $\dot{\bar{r}}(t_0)$ este vectorul director al tangentei în punctul M_0 la curbă.

Punctul M_0 se numeşte *neinflexionar* dacă $\ddot{\bar{r}}(t_0) \neq 0$ şi *inflexionar* dacă $\ddot{\bar{r}}(t_0) = 0$. Dacă, în plus, vectorii $\dot{\bar{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\bar{r}}(t_0)$ sunt necoliniari, adică $\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0) \neq 0$, atunci punctul M_0 se numeşte *nestaționar*. În caz contrar, el se numeşte punct *staționar* al curbei *(C)*).

Definiția 8.2.3. *Se numeşte plan osculator (π_0) la curba (C) într-un punct neinflexionar şi nestaționar $M_0(t_0) \in$ (C), planul care trece prin M_0 şi este paralel cu direcțiile vectorilor liberi $\dot{\bar{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\bar{r}}(t_0)$.*

Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare M(x, y, z) ∈ (π_0), atunci ecuația vectorială a planului osculator este

$$\langle \bar{R} - \bar{r}(t_0), \dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0) \rangle = 0.$$

De aici rezultă ecuația carteziană a planului osculator:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{8.2.13}$$

Se observă că planul osculator (π_0) conţine dreapta tangentă la curbă în punctul M_0 şi este perpendicular pe planul normal, (π_N), în M_0.

De asemenea este important de reţinut că, în punctele inflexionare sau staţionare ale lui *(C)*, nu putem ataşa plan osculator.

Din acest motiv, în cele ce urmează, vom lua în considerare numai punctele $M_0 \in (C)$, neinflexionare şi nestaţionare.

O altă observaţie importantă este aceea că planul osculator nu depinde de parametrizarea aleasă pe curba *(C)*.

Intersecţia dintre planul normal (π_N) şi planul osculator (π_0) la curba *(C)* în punctul M_0 este în mod evident o dreaptă.

Definiţia 8.2.4 *Dreapta de intersecţie dintre planul normal (π_N) şi planul osculator (π_0) se numeşte normala principală la curba (C) în punctul M_0 şi va fi notată (n_p).*

Ecuaţia normalei principale, ca dreaptă de intersecţie a celor două plane, este dată de sistemul format de ecuaţiile (8.2.12) şi (8.2.13).

Pe de altă parte, se observă că vectorul director $\bar{v}_N$ al normalei principale este perpendicular pe fiecare din normalele celor două plane. Deci $\bar{v}_N$ este coliniar cu vectorul $(\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)) \times \dot{\bar{r}}(t_0)$. Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare $M(x, y, z) \in (n_p)$, atunci ecuaţia vectorială a normalei principale este

$$\bar{R} - \bar{r}(t_0) = \lambda(\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)) \times \dot{\bar{r}}(t_0),\ \lambda \in \mathbf{R}. \tag{8.2.14}$$

Scriind această ecuaţie pe componente obţinem ecuaţiile carteziene canonice

$$(n_p) : \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ l & m \end{vmatrix}} \tag{8.2.15}$$

, unde

(8.2.16) $$l = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix},\ m = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix},\ n = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}.$$

Definiţia 8.2.5 *Dreapta perpendiculară pe planul osculator (π_0) în M_0 se numeşte dreaptă binormală (b_N).*

Observăm că am obţinut în M_0 trei drepte perpendiculare două câte două, anume: dreapta tangentă la curba (C) în M_0, normala principală şi dreapta binormală. Este clar că dreapta binormală este conţinută în planul normal, iar vectorul ei director este de fapt normala la planul osculator, adică vectorul liber $\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)$. Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare M(x, y, z) ∈ (b_N), atunci ecuaţia vectorială a binormalei este

(8.2.17) $$\bar{R} - \bar{r}(t_0) = \lambda(\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

De aici deducem ecuaţiile carteziene generale ale binormalei

(8.2.18) $$(b_N) : \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$, unde *l, m* şi *n* sunt definiţi de (8.2.16).

Definiţia 8.2.6 *Se numeşte plan rectificat (sau rectificator) în M_0 planul ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe normala principală în M_0.*

Ecuaţia vectorială a planului rectificat este $\langle \bar{R} - \bar{r}(t_0), (\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)) \times \dot{\bar{r}}(t_0)\rangle = 0$, deoarece normala principală în M_0 este de fapta normala la planul rectificat. Ecuaţia carteziană a planului rectificat este

(8.2.19) $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$ cu *l, m* şi *n* definiţi de (8.2.16).

Fie M(x, y, z) un punct regulat neinflexionar şi nestaţionar al curbei *(C)* (x = x(t), y = y(t), z = z(t)).

În continuare vom dicuta unele proprietăţi ale tangentei, normalei principale şi binormalei la curba *(C)* în punctul M.

În primul rând, observăm că versorul dreptei tangente este $\bar{\tau} = \dot{\bar{r}}(t)/\left\|\dot{\bar{r}}(t)\right\| = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$, unde *s* semnifică lungimea arcului de curbă. Derivând relaţia $\langle \bar{\tau}, \bar{\tau} \rangle = 1$ în raport cu *s,* obţinem $2\langle \bar{\tau}, \dfrac{d\bar{\tau}}{ds} \rangle = 0$. Deci $\bar{\tau}$ şi $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ sunt vectori ortogonali. Deducem că $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ este o direcţie în planul normal. Un calcul simplu arată că $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds} = \dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{d\bar{r}}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\bar{r}}{dt}\dfrac{dt}{ds}\right) = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 + \dfrac{d\bar{r}}{dt}\dfrac{d^2t}{ds^2} = \ddot{\bar{r}}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\bar{r}}\dfrac{d^2t}{ds^2}$. Deoarece $\dot{\bar{r}}$ şi $\ddot{\bar{r}}$ sunt direcţii ce determină planul osculator, rezultă că $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ este o direcţie în planul osculator. Fiind direcţie atât în planul osculator cât şi în cel normal, $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ este vectorul director al normalei principale. Notăm cu $\bar{\nu}$ versorul $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds} / \left\|\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}\right\|$ şi îl vom numi versor normal principal. Deoarece binormala este perpendiculară atât pe dreapta tangentă cât şi pe normala principală, alegem versorul $\bar{\beta}$ al binormalei astfel încât reperul $\{M_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ să fie drept orientat (adică $\bar{\tau} \times \bar{\nu} = \bar{\beta}$, $\bar{\nu} \times \bar{\beta} = \bar{\tau}$, $\bar{\beta} \times \bar{\tau} = \bar{\nu}$). Atunci

- planul osculator este determinat de $\bar{\tau}$ şi $\bar{\nu}$,
- planul normal (π_N) este determinat de $\bar{\nu}$ şi $\bar{\beta}$ iar
- planul rectificat este determinat de $\bar{\tau}$ şi $\bar{\beta}$.

Definiţia 8.2.7. *a) Triedrul format de vectorii liberi $\bar{\tau}, \bar{\nu}$ şi $\bar{\beta}$ se numeşte triedrul lui Frenet.*

b) Scalarul $K = \left\| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right\|$ se numeşte curbură a curbei (C) în punctul regulat $M \in (C)$. Inversul curburii se numeşte rază de curbură $R = 1/K$.

În cele ce urmează vom calcula şi derivatele $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$, $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$. Cum $\langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle = 1$, prin derivare rezultă că $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$, $\bar{\nu}$ sunt vectori ortogonali. Analog se arată că $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ şi $\bar{\beta}$ sunt ortogonali. Deoarece triedrul lui Frenet formează o baza în V_3, avem $\frac{d\bar{\nu}}{ds} = a\bar{\beta} + b\,\bar{\tau}$ şi $\frac{d\bar{\beta}}{ds} = a_1\bar{\nu} + b_1\,\bar{\tau}$. Derivând relaţia $\langle \bar{\tau}, \bar{\nu} \rangle = 0$ obţinem $\langle \frac{d\bar{\tau}}{ds}, \bar{\nu} \rangle + \langle \bar{\tau}, \frac{d\bar{\nu}}{ds} \rangle = 0 \Leftrightarrow K + \langle \bar{\tau}, a\bar{\beta} + b\,\bar{\tau} \rangle = 0 \Leftrightarrow K + b = 0 \Leftrightarrow b = -K$. Procedând asemănător, se derivează relaţia $\langle \bar{\tau}, \bar{\beta} \rangle = 0$ şi se obţine $b_1 = 0$. Derivăm şi relaţia $\langle \bar{\nu}, \bar{\beta} \rangle = 0$ şi deducem că $a + a_1 = 0$. Notând scalarul a_1 cu $1/T$ obţinem $a = -1/T$. Valoarea $1/T$ se numeşte torsiunea curbei *(C)* în punctul M, iar T se numeşte raza de torsiune. Din cele de mai sus rezultă relaţia

(8.2.20) $$\begin{pmatrix} d\bar{\tau}/ds \\ d\bar{\nu}/ds \\ d\bar{\beta}/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ -1/R & 0 & 1/T \\ 0 & -1/T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{\nu} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix},$$

cunoscută sub denumirea de formulele lui Frenet.

8.3. Exerciţii

1. (***Cisoida lui Diocles***) Cercul *(C)* de rază r şi centru A(r, 0) care intersectează axa Ox a reperului cartezian xOy în punctele O şi B. Fie D un

punct variabil pe tangenta în punctul B la cercul *(C)*. Notăm cu E intersecţia dreptei DO cu cercul *(C)*. a) Să se determine locul geometric al punctelor P(x, y) care satisfac condiţia P ∈ OD şi DP = OE (Fig. 46).

b) Să se determine punctele singulare ale cisoidei şi să se precizeze care este ordinul lor de multiplicitate.

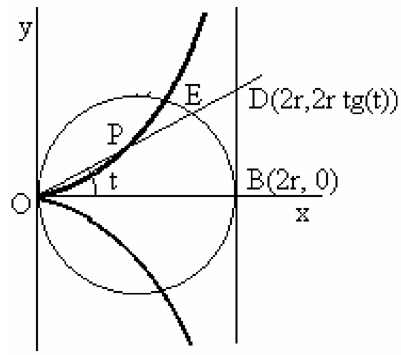


Fig. 46

R: Dacă (x, y) sunt coordonatele lui P, atunci folosim notaţiile din Fig. 46 şi avem x = OP cos t, y = OP sin t, OP = OD - PD = OD – OE = 2r/cos(t) – 2rcos (t) = 2r $\sin^2$(t)/cos(t). Deci x = 2r $\sin^2$(t), y = 2r $\sin^3$(t)/cos(t). Eliminând pe *t,* obţinem ecuaţia carteziană implicită F(x, y) = 0, unde F(x, y) = $x^3 + xy^2 - 2ry^2$. b) Deoarece $F`_x = 3x^2 + y^2$, $F`_y = 2xy - 4ry$ se anulează simultan dacă şi numai dacă x = y = 0, rezultă că O(0, 0) este singurul punct singular al cisoidei. El este un punct dublu deoarece $F``_{yy} = -4r \neq 0$ pentru x = y = 0. Punctul este parabolic.

2. (***Foliului lui Descartes***) Se considera curba a cărei ecuaţie implicită este $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ (Fig. 47). a) Să se determine toate punctele duble ale curbei precum şi pantele tangentelor în acestea. b) Să se determine curbura şi raza de curbură în punctele de pe curbă ce au abscisa egală cu 1.

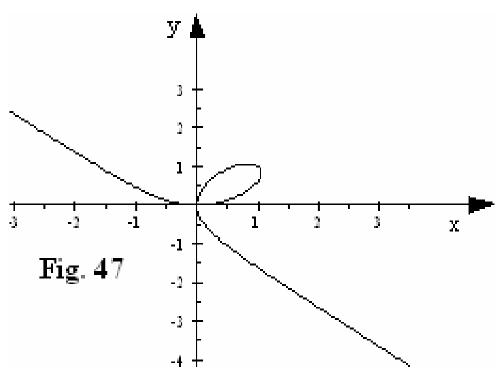


Fig. 47

R: a) Avem $F`_x = 3x^2 - 2y$, $F`_y = 3y^2 - 2x$, $F``_{xx} = 6x$, $F``_{xy} = -2$, $F``_{yy} = 6y$. Singurul punct de pe curbă în care se anulează derivatele parţiale de ordinul înâi este O(0, 0). Deoarece $F``_{xy} = -2 \neq 0$, rezultă că O(0, 0) este punct dublu. Cantitatea $\Delta_{x_0 y_0}$, din Definiţia 8.1.8 este egală cu 4 în punctul (0, 0), deci avem de a face cu un punct hiperbolic. Rezolvând ecuaţia (8.1.20) rezultă că

pantele celor două tangente în punct sunt $m_1=\infty$ şi $m_2 = 0$. Cele două tangente sunt axa Oy şi axa Ox.

b) Se deduce uşor că punctele de pe foliul lui Descartes care au abscisa egală cu 1 sunt (1, 1), (1, $\sqrt{5}$/2-1/2) şi (1, -$\sqrt{5}$/2-1/2). Aplicând formula (8.1.18) deducem că în cazul punctului (1, 1) curbura este K = 8, R = 1/8. În cazul punctului (1, $\sqrt{5}$/2-1/2) obţinem K = (59/610)$\sqrt{5}$+291/122 ≅ 2. 6015, R = 1/K ≅0.38439 şi pentru punctul (1, -$\sqrt{5}$/2-1/2) avem K = -(59/610)$\sqrt{5}$+291/122 ≅ 2. 1690, R = 1/K ≅0.46105.

3. (***Elicea cilindrică***) Fie curba (C) : x = 2cos t, y = 2sint, z =3t, t∈**R** (Fig. 48). a) Să se determine triedrul Frenet al curbei într-un punct oarecare. b) Să se scrie ecuaţia planului rectificator.

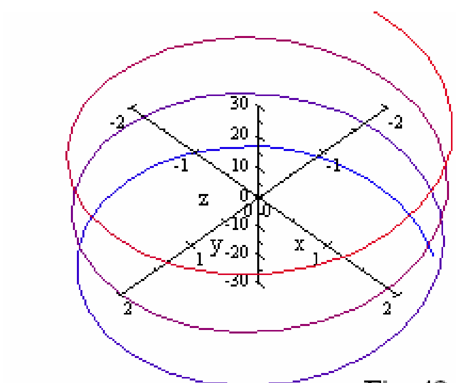


Fig. 48

R: Avem: $\dot{x}(t) = -2\sin t$, $\dot{y}(t) = 2\cos t$, $\dot{z}(t) = 3$, $\ddot{x}(t) = -2\cos t$, $\ddot{y}(t) = -2\sin t$, $\ddot{z}(t) = 0$. Versorul dreptei tangente este $\bar{\tau} = -2/\sqrt{13}\sin(t)\,\bar{i} + 2/\sqrt{13}\cos(t)\,\bar{j} + 3/\sqrt{13}\,\bar{k}$. Ecuaţia planului osculator este (vezi relaţia (8.2.13)) $\begin{vmatrix} x-2\cos(t) & y-2\sin(t) & z-3t \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 3 \\ -2\cos(t) & -2\cos(t) & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ 3 sin(t)(x – 2cos(t)) - 3 cos(t)(y – 2sin(t)) +2(z – 3t) = 0. De aici deducem că un versor al binormalei este $\bar{\beta} = 3/\sqrt{13}\sin(t)\,\bar{i} - 3/\sqrt{13}\cos(t)\,\bar{j} + 2/\sqrt{13}\,\bar{k}$. Atunci versorul normalei principale va fi $\bar{\nu} = \bar{\beta}\times\bar{\tau} = -13(\cos(t)\,\bar{i} + \sin(t)\,\bar{j})$.

Ecuaţiile tangentei sunt $\frac{X-2\cos(t)}{-2\sin(t)} = \frac{Y-2\sin(t)}{2\cos(t)} = \frac{Z-3t}{3}$. Ecuaţiile normalei principale sunt $\frac{X-2\cos(t)}{\cos(t)} = \frac{Y-2\sin(t)}{\sin(t)}$, Y = 3t. Ecuaţiile binormalei sunt $\frac{X-2\cos(t)}{3\sin(t)} = \frac{Y-2\sin(t)}{-3\cos(t)} = \frac{Z-3t}{2}$. Ecuaţia planului rectificator este (X - 3cos(t)) cos(t) + (Y - 3sin(t)) sin(t) = 0.

Anexa I

Conice date prin ecuaţii reduse

Fie E_2 spaţiul punctual euclidian bidimensional şi $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$(xOy) un reper cartezian ortonormat .

Definiţia A1. Elipsa *este locul geometric al punctelor din planul euclidian a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe distincte F_1 şi F_2 este constantă.*

Fie a, c$\in$ $\mathbf{R}_+$ şi punctele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0) \in E_2$. Coordonatele oricărui punct M(x, y) $\in$ E_2 cu proprietatea $\|\overline{MF_1}\| + \|\overline{MF_2}\| = 2a$ satisfac ecuaţia:

(A1)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \ .$$

Ecuaţia (A1) este ecuaţia carteziană a elipsei. Este uşor de văzut că avem şi următoarele ecuaţii parametrice: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$.

Elementele principale ale elipsei sunt: punctele F_1 şi F_2 - *focarele* elipsei; $\delta(F_1, F_2) = 2c$ - *distanţa focală*; numărul real *a* - *semiaxa mare,* numărul real *b* - *semiaxa mică*; punctele A(a,0) , A'(-a,0) , B(b,0), B'(-b,0) - *vârfurile elipsei*, dreptele $x = \pm \frac{a^2}{c}$ - *drepte directoare* ale elipsei şi $e = \frac{c}{a} < 1$ - *excentricitatea elipsei.*

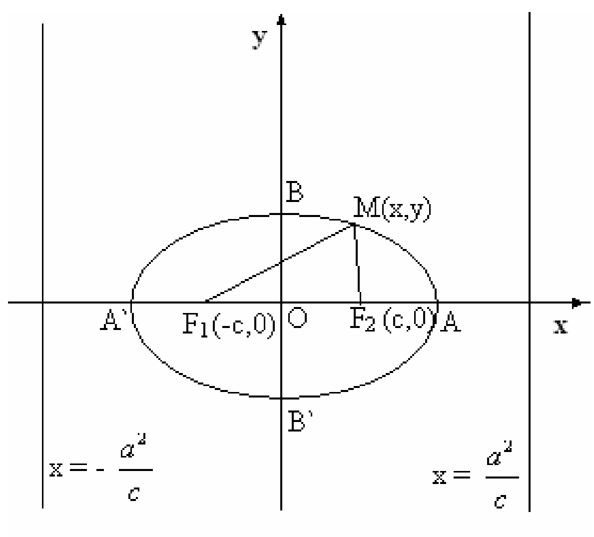


Fig. A1

Facem observaţia că axele Ox şi Oy ale reperului cartezian sunt axe de simetrie ale elipsei şi originea O a reperului este centrul elipsei . Din acest motiv, reperul ortonormat xOy se numeşte *canonic* iar ecuaţia (A1) se numeşte *redusă* .

Se cunoaşte faptul că elipsa, caracterizată de ecuaţia (A1), reprezintă locul geometric al punctelor M(x,y) care satisfac una din relaţiile: $\frac{\|\overline{MF_1}\|}{\delta(M,d_1)} = e$ sau $\frac{\|\overline{MF_2}\|}{\delta(M,d_2)} = e$.

De asemenea se poate arăta uşor că perpendiculara pe tangenta într-un punct oarecare al elipsei este bisectoare a unghiului razelor focale în acest punct (proprietatea optică a elipsei) .

Definiţia A2. Hiperbola *este locul geometric al punctelor din planul euclidian* E_2 *pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la două puncte fixe, distincte* F_1 *şi* F_2 *este constantă .*

Fie a, c$\in$ $\mathbf{R}_+$ şi punctele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0) \in E_2$. Coordonatele oricărui punct $M(x,y) \in E_2$ cu proprietatea $|MF_1 - MF_2| = 2a$, cerută de definiţia hiperbolei, satisfac ecuaţia:

$$\text{(A2)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ecuaţia (A2) este ecuaţia redusă (carteziană) a hiperbolei. Ca şi în cazul elipsei avem următoarele ecuaţii parametrice : $x = \pm a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $t \in \boldsymbol{R}$

Elementele principale ale unei hiperbole sunt: $F_1(-c,o)$, $F_2(c,o)$ – *focarele* hiperbolei ; $A'(-a,0)$, $A(a,0)$ – *vârfurile* hiperbolei; a ,b - semiaxele hiperbolei; dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$ - *asimptotele* hiperbolei; dreptele $x = \pm\frac{a^2}{c}$ - *directoarele* hiperbolei şi $e = \frac{c}{a} > 1$ - *excentricitatea* hiperbolei. Axele Ox şi Oy ale reperului xOy sunt axe de simetrie ale hiperbolei iar originea reperului este centru de simetrie al hiperbolei.

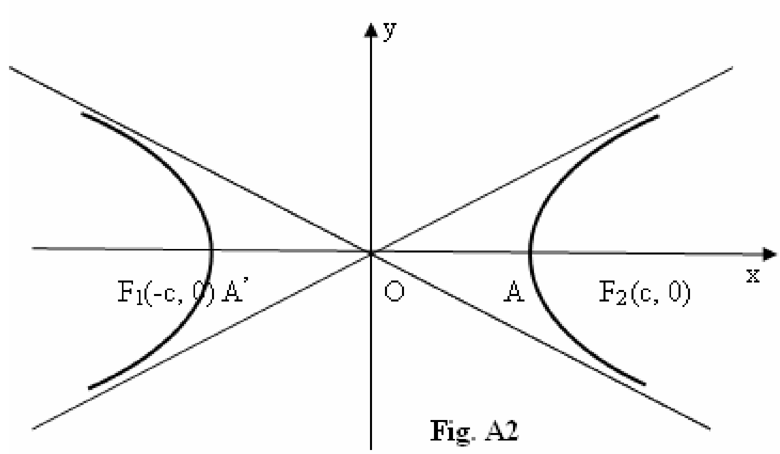


Fig. A2

Hiperbola caracterizată de ecuaţia (A2) reprezintă şi

locul geometric al punctelor $M(x,y) \in E_2$, care satisfac una din relaţiile :

$$\frac{\left\|\overline{MF_1}\right\|}{\delta(M, d_1)} = e \text{ sau } \frac{\left\|\overline{MF_2}\right\|}{\delta(M, d_2)} = e,$$

unde dreptele d_1 şi d_2 sunt directoarele hiperbolei. Tangenta la hiperbolă, într-un punct al ei, este bisectoarea unghiului razelor focale (proprietatea optică a hiperbolei).

Definiţia A3. *Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix F (focar) şi o dreaptă fixă Δ (directoare).*

Fie $p \in \mathbf{R}_+$. Considerăm punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ şi dreapta (Δ): $x = -\frac{p}{2}$. Atunci coordonatele punctelor $M(x,y) \in E_2$ cu proprietatea $\delta(M,F) = \delta(M, \Delta)$ satisfac ecuaţia:

(A3) $\qquad y^2 = 2px$, ($p > 0$).

Elementele parabolei sunt: $F(\frac{p}{2},0)$ – *focarul* parabolei; numărul real $\frac{p}{2}$ - *distanţa focală*; O(0,0) - *vârful* parabolei; Ox - *axa transversală* a parabolei (Ox este *axa de simetrie pentru parabolă*); Oy - *axa tangentă* la parabolă şi dreapta Δ: $x = -\frac{p}{2}$ care este *directoarea parabolei.* Excentricitatea parabolei este $e = 1$.

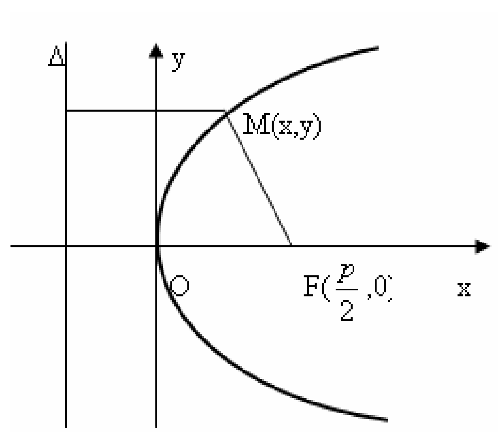


Fig. A3